On commencera chaque exercice par un schéma. Dans tous les exercices d'optique, on prendra l'indice de l'air égal à 1,000.

Exercices d'application : Mesures et imprécisions, réfractomètre, émergence du prisme, à la pêche, catadioptre, fibre optique.

Culture en sciences physiques : Émergence du prisme, construction de Descartes, lame, arc-en-ciel, réfraction atmosphérique.

Corrigés en TD : Mesures et imprécisions, réfractomètre, à la pêche, fibre optique, arc-en-ciel.

Mesures et imprécision

Exercice 1 : Équations aux dimensions

1. (a) L'énergie potentielle électrique $\mathscr{E}_{\text{pot}}$ d'une particule de charge q dans un champ de potentiel électrique V (de même dimension q'une tension électrique, exprimé en V) est $\mathscr{E}_{\text{pot}} = qV$. En déduire l'expression de la dimension d'un potentiel électrique en fonction des dimensions fondamentales.

   (b) La norme de la composante magnétique de la force Lorentz F_B subie par une particule de charge e animée d'une vitesse de norme v dans un champ magnétique de norme B a, dans certaines conditions pour expression $F_B = evB$. En déduire l'expression de la dimension d'un champ magnétique en fonction des dimensions fondamentales.

2. Déterminer parmi les expressions suivantes celles qui ne sont pas homogènes. Les grandeurs m ; v ; t ; I ; ℓ ; U ; B ; ν ; F ; S sont respectivement : une masse ; une vitesse ; une durée ; une intensité de courant électrique ; une longueur ; une tension électrique ; un champ magnétique ; une fréquence ; une force ; une surface.

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{ItU}{\ell} + evB \qquad \nu = S^{1/4}/\sqrt{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}} \qquad 4 = \frac{\sqrt{F\ell/m}}{v} - \cos(F\nu) \tag{1}$$

3. Proposer une expression reliant une tension électrique V à un champ magnétique et une surface, en faisant intervenir une dérivée par rapport au temps.

Exercice 2 : Analyse dimensionnelle

1. Proposer par analyse dimensionnelle une expression de la force de frottement subie par un avion se mouvant à la vitesse v dans un fluide de masse volumique ρ en présentant une surface d'aire S.

2. Proposer des ordres de grandeur pour un avion de ligne et en déduire un ordre de grandeur de cette force. Comparer à la force nécessaire pour assurer sa sustentation.

Exercice 3 : Imprécision

1. (a) Rappeler l'expression de la distance parcourue par un corps lâché sans vitesse initiale dans un champ de pesanteur d'accélération g au bout d'une durée t_0.

   (b) On suppose dans cette question connaître $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ « parfaitement » et on mesure $t_0 = 10{,}0(5)\,\mathrm{s}$. Déterminer la distance z_0 parcourue et présenter cette valeur accompagnée de l'estimation de ses imprécisions absolue et relative.

   (c) Quelles doivent être les imprécisions relatives maximales sur t_0 et g pour pouvoir mesurer z_0 avec une précision meilleure que $1 \cdot 10^{-3}$?

2. Un objet initialement au repos est animé d'un mouvement d'abord rectiligne uniformément accéléré uniforme d'accélération $a = 0{,}50(5)\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ pendant une durée $t_0 = 2{,}0(1)\,\mathrm{s}$ puis rectiligne uniforme à la vitesse $v_1 = 1{,}00(5)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pendant la durée $t_1 = 2{,}0(1)\,\mathrm{s}$.

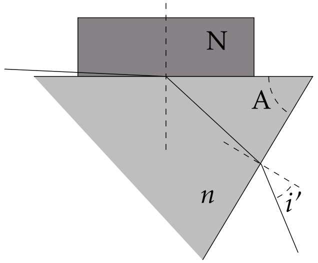
   (a) Déterminer les expressions des distances x_1 et x_2 parcourues pendant chacune des phases du mouvement.

   (b) En déduire la distance totale parcourue et présenter cette valeur accompagnée de l'estimation de ses imprécisions absolue et relative.

Réfraction et réflexion

Exercice 4 : Réfractomètre de Pulfrich

On étudie un dispositif permettant de mesurer l'indice de réfraction d'un objet. Un rayon lumineux provenant d'un milieu d'indice inconnu N tombe sur un prisme (indice n, angle A, placé dans l'air, d'indice 1) sous une incidence rasante (*ie* pratiquement dans le plan du dioptre comme indiqué sur le schéma). Il émerge du prisme en faisant l'angle i' avec la normale à la face de sortie.



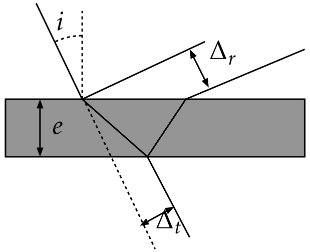
1. Établir une relation entre A, i' N et n.

2. Quel angle choisiriez-vous pour déterminer facilement N ? Application numérique pour $n = 1{,}73$ et $i' = 30°$.

3. Quel intérêt ce dispositif présente-t-il par rapport à la mesure du minimum de déviation dans un prisme ?

Exercice 5 : Lame à face parallèles

Un rayon lumineux tombe avec un angle i sur une lame de verre d'indice $n = 1{,}5$, d'épaisseur $e = 1$ mm à faces parallèles placée dans l'air (attention la figure ci-contre est délibérément fausse).



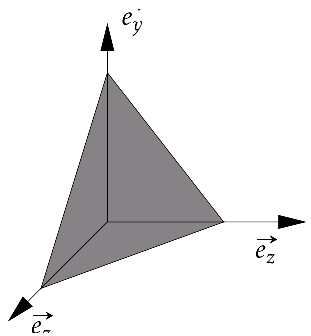
1. Faire un dessin et représenter le chemin suivi par les deux premiers rayons réfléchis. Donner l'expression de la distance Δ_{r} les séparant en fonction de i, e et n. Application numérique pour $i = 20°$.

2. On considère maintenant le premier rayon transmis. Calculer le déplacement Δ_{t} induit par la lame. Faire également l'application numérique.

Exercice 6 : Dispositif catadioptrique

Un « coin de cube » est un ensemble de 3 miroirs accolés perpendiculairement deux à deux. Un rayon lumineux, caractérisé par son vecteur directeur $\overrightarrow{k}$, vient s'y réfléchir. Trouver la direction du faisceau après qu'il a subi une réflexion sur chacune des faces[a]. Un tel coin de cube a été déposé sur la face visible de la Lune par la mission Apollo XI. Quelle est à votre avis son utilité ?

[a] Indication : choisir un repère dont les axes sont les normales aux trois plans et y décomposer les vecteurs unitaires dirigeant les rayons.



Exercice 7 : ↯ Construction de Descartes d'un rayon réfracté

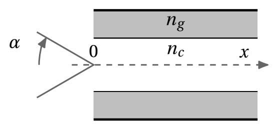
1. On considère un rayon lumineux tombant avec un angle i sur un dioptre plan. Déterminer une construction géométrique du rayon réfracté en utilisant des cercles dont le centre est le point d'impact du rayon incident sur le dioptre et dont les rayons sont les indices des milieux séparés par le dioptre.
2. Retrouver la condition de réfraction limite.

Réflexion totale et réfraction

Exercice 8 : Fibre optique à saut d'indice

On considère une fibre optique à saut d'indice dont les indices sont notés :

- n_c pour le cœur,
- n_g pour la gaine.



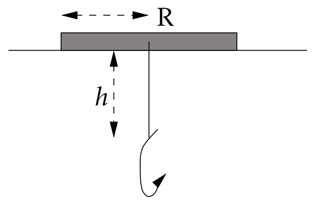
1. (a) Établir l'expression du demi-angle au sommet du cône d'admission, noté α_{max} en fonction des indices n_c et n_g si la fibre est plongée dans l'air.
   (b) En déduire la valeur de n_g si on souhaite réaliser $\alpha_{\text{max}} = 30°$ pour $n_c = 1{,}516$
   On considère cette condition réalisée pour la suite.
   (c) On plonge l'autre extrémité de la fibre dans l'eau. Déterminer le demi-angle au sommet du cône de lumière qui émerge de la fibre dans l'eau.
2. Le matériau dont est formée le cœur présente de la dispersion : dans le domaine visible, l'indice est donné par :

$$n = n_0 + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{avec : } n_0 = 1{,}5046 \quad ; B = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mu\text{m}^2.$$

   On injecte un cône lumineux de demi-angle au sommet α_{max} comprenant des rayonnements entre 380 nm et 750 nm. Quelles seraient les caractéristiques du faisceau émergent si l'indice de la gaine ne présentait pas de dispersion et était toujours égal à la valeur déterminée à la question .
3. On injecte une impulsion de durée $\tau = 1\,\text{ns}$ d'un rayonnement quasi-monochromatique de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 611\,\text{nm}$ avec un angle $\alpha = 50°$. Déterminer la longueur maximale L_{max} de la fibre pour laquelle la durée 1 ns de l'impulsion a été multipliée par 2.

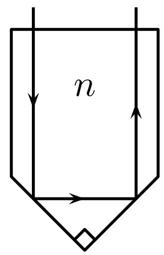
Exercice 9 : ↯ À la pêche

Un pécheur utilise le dispositif représenté ci-contre : un hameçon est placé à une profondeur h sous un flotteur qu'on modélisera comme un disque mince de rayon R. À quelle condition l'hameçon est-il invisible de la surface ? On prendra $n = 1{,}33$ pour l'indice de l'eau.



Exercice 10 : Prisme à réflexion totale

On considère le prisme de la figure ci-dessous, d'indice n, dont la pointe forme un angle de 90°.

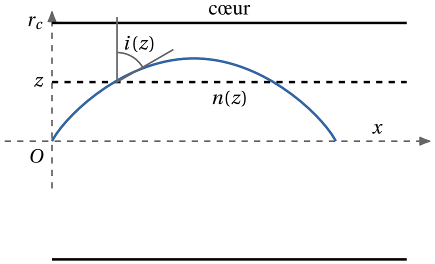


1. Le prisme est plongé dans l'air d'indice $n_0 \simeq 1{,}000$. On constate qu'un rayon lumineux arrivant sous incidence normale ressort du prisme parallèlement à lui-même après avoir subi deux réflexions totales sur les faces de la pointe. En déduire que l'indice du prisme doit être supérieur à une valeur n_{min}.
2. La pointe du prisme est maintenant plongée dans de l'eau, d'indice $n_1 = 1{,}33$.
   (a) La direction du rayon émergent du prisme par la face supérieure est-elle modifiée ?
   (b) On constate qu'il n'y a maintenant plus réflexion totale : on observe des rayons émergents dans l'eau. En déduire que l'indice du prisme est inférieur à une autre valeur n_{max}.
   (c) Déterminer la direction des rayons émergents dans l'eau pour $n = 1{,}52$ et préciser la déviation du rayon quand il parvient dans l'eau. Réaliser un schéma des différentes réflexions et réfractions.
   (d) Quelle caractéristique du rayon émergent par la face supérieure est-elle modifiée quand le prisme est plongé dans l'eau ? Proposer une utilisation de ce dispositif comme détecteur de niveau d'eau.

Exercice 11 : Propagation dans une fibre optique à gradient d'indice

On considère un milieu dans lequel l'indice n varie avec la distance à l'axe : il diminue de façon continue avec $|z|$ (voir figure). On note r_c le rayon du cœur.

1. Retrouver que la quantité $n(z)\sin[i(z)]$, où $i(z)$ est l'angle que fait le rayon avec $\vec{e}_z$ est une constante (on utilisera les notations du cours). En déduire l'équation différentielle décrivant la trajectoire du rayon lumineux, *ie* l'expression de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$ en fonction de z. On considérera que le rayon part du point $(z=0; x=0)$ dans la direction des z croissants (voir schéma).



2. Résoudre cette équation dans le cas où $n(z)^2 = n_0^2 - k|z|$. On la mettra sous la forme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{A}{\sqrt{1-z/z_1}}$ où A et z_1 sont des constantes à exprimer en fonction des données du problème et on montrera qu'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-z/z_1}}$ est $-2z_1\sqrt{1-z/z_1}$. Quelle est la nature de la trajectoire ?

Exercice 12 : Conditions d'émergence d'un prisme

1. Quel phénomène peut empêcher un rayon lumineux de sortir d'un prisme d'indice n plongé dans un milieu d'indice 1 ?
2. On désigne par A l'angle au sommet du prisme. Déterminer les valeurs entre lesquelles doit être compris l'angle d'incidence i pour qu'un rayon émerge. On posera[i] $\theta_l = \arcsin\frac{1}{n}$
3. En déduire une valeur limite pour l'angle A pour qu'un rayon émerge et déterminer les valeurs de l'angle d'émergence i' en fonction de i. On prêtera attention au cas $A = \theta_l$. Déterminer les valeurs des angles remarquables pour des indices usuels.

Optique atmosphérique (traités en TD)

Exercice 13 : Réfraction atmosphérique

On étudie dans cet exercice un effet de l'atmosphère sur les observations astronomiques. L'indice de l'air varie en effet avec l'altitude et les rayons lumineux en provenance d'une étoile se propagent dans un milieu inhomogène avant d'atteindre le sol.

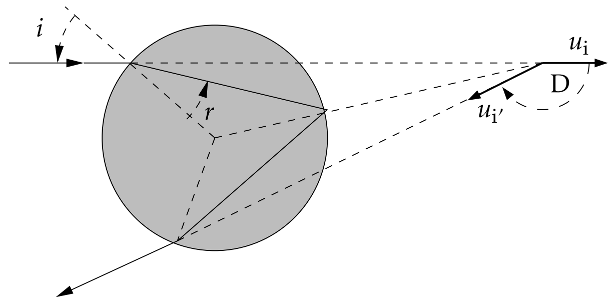
1. On modélise l'atmosphère par un empilement de couches horizontales d'indice variable [ii]. L'indice vaut $n_S = 1{,}000293$ au niveau du sol et $n_\infty = 1$ en dehors de l'atmosphère.
   (a) Illustrer par un schéma la courbure des rayons traversant l'atmosphère.
   (b) Justifier qu'en notant $i(z)$ l'angle par rapport à la verticale d'un rayon à l'altitude z où l'indice est $n(z)$, la quantité $n(z)\sin i(z)$ est une constante au cours de la traversée de l'atmosphère.
2. On s'intéresse à la position d'une étoile (par exemple Proxima du Centaure) E vue par un observateur O situé à la surface de la Terre. Celle-ci est déterminée par la *distance zénithale* α, c'est-à-dire l'angle formé par la verticale (axe Oz) et la direction OE.
   (a) Justifier qu'on peut considérer que le faisceau arrivant sur Terre est constitué de rayons parallèles.
   (b) Montrer que l'observateur voit E à une distance zénithale apparente α' qu'on exprimera en fonction de n_S et α. Que vaut-il pour $\alpha = 10°, 50°$.
3. Peut-on considérer le Soleil comme ponctuel ? On le caractérise par son diamètre angulaire θ, l'angle entre les deux rayons extrêmes du disque solaire parvenant sur Terre.
   (a) Calculer θ en l'absence d'atmosphère.
   (b) Calculer en présence d'atmosphère le diamètre angulaire apparent quand le soleil est au zénith. Sa forme est-elle modifiée ?
   (c) En considérant maintenant la courbure de la Terre, expliquer qualitativement par un schéma la forme aplatie du soleil à son coucher.
   (d) On rappelle que la dispersion de l'atmosphère courbera d'avantage les rayons de plus courte longueur d'onde. De quel couleur devrait paraître le Soleil juste à l'instant de son coucher.

Données Rayon terrestre $R_T = 6{,}4\cdot10^6$ m, rayon solaire $R_S = 6{,}96\cdot10^8$ m, distance Terre-Proxima du Centaure $D = 4{,}0\cdot10^{16}$ m, distance Terre-Soleil $d = 1{,}5\cdot10^{11}$ m.

Exercice 14 : Arc en ciel

Le phénomène de l'arc en ciel a été expliqué par Descartes dans *Le Discours de la Méthode* en 1637 grâce aux lois de Snell et Descartes. Nous en présentons ici une interprétation simplifiée. Nous allons voir qu'il peut être compris en considérant les réflexions et réfractions subies par un rayon lumineux frappant une goutte d'eau.

Pour alléger les notations, et éviter d'introduire plusieurs orientations d'angles, on utilisera ici des angles non orientés.



1. Exprimer la déviation D subie par le rayon incident en fonction de l'angle d'incidence i et de l'angle du premier rayon réfracté r.
2. (a) Dériver, par rapport à i, l'expression de D obtenue et la relation de Snell et Descartes en faisant apparaître $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$.
   (b) En déduire $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i}$ en fonction de $\cos i, \cos r$ et n, puis une relation entre $\cos i$ et $\cos r$ quand $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$.

[i] arcsin est la fonction définie sur $[-1;1]$ et à valeurs dans $[-\pi/2;\pi/2]$ telle que pour tout $x\in[-\pi/2;\pi/2]$: $\arcsin(\sin(x)) = x$. Elle est croissante sur $[-1;1]$.
[ii] On néglige ici pour simplifier la courbure de la Terre

(c) Déterminer, en élevant cette relation au carré, la valeur de $\sin(i)$ pour laquelle la déviation D est extrêmale. On notera avec un indice $_e$ les valeurs des angles correspondants (i_e, r_e, D_e). Calculer, pour $i = i_e$, l'angle $\alpha_e = \pi - D_e$ pour une goutte d'eau d'indice $n = 1{,}33$.

(d) Interpréter la présence de cet extremum en terme de quantité de lumière reçue par l'œil de l'observateur.

3. On suppose maintenant que la répartition des gouttes dans l'atmosphère est uniforme. On considère le soleil ponctuel.

(a) On néglige pour l'instant la dispersion de l'eau ($n = cst$). Montrer que les gouttes qui apparaissent brillantes à l'observateur sont situées sur un cône de centre l'observateur, d'axe la direction Soleil-observateur et de demi-angle au sommet α.

(b) i. Montrer que $\frac{\mathrm{d}\alpha_e}{\mathrm{d}n} = -\frac{4}{n}\tan r_e$. En déduire le signe de cette expression et expliquer la répartition des couleurs dans un arc en ciel en considérant la dispersion de l'eau.

ii. Estimer la variation d'angle entre l'arc rouge et l'arc violet, pour lesquels l'indice vaut respectivement $1{,}33 - 5\,10^{-3}$ et $1{,}33 + 5\,10^{-3}$. On pourra utiliser un calcul de l'incertitude sur α_e en fonction de l'incertitude sur n.

On pourra utiliser cette simulation.