On utilisera les formules vu en cours du champ magnétique du fil rectiligne infini et de la spire circulaire. On négligera tout phénomène d'induction.
Pour chaque configuration de courants, on justifiera les propriétés de symétrie et d'invariance du champ magnétique en fonction de celles des sources.

Exercices d'application : Fils électriques, Helmholtz, lecture, rail de Laplace, définition de l'ampère, couples sur un triangle

Culture en sciences physiques : Bobines de Helmholtz, lecture, pièces polaires, Piège de Ioffe-Pritchard, noyau atomique, balance de Cotton, aimant entraîné par un champ tournant

Corrigés en TD : Lecture, Ioffe-Pritchard, noyau atomique, Rail de Laplace, ampère, Balance de Cotton, aimant en rotation.

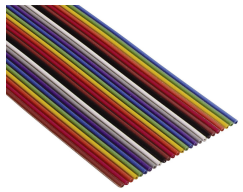
Champ magnétique

Exercice 1 : Fils électriques et câble coaxial

1. Rappeler la géométrie des lignes de champ magnétique autour d'un fil rectiligne.
2. Donner l'ordre de grandeur du champ magnétique à une distance $d = 1{,}0\,\text{cm}$ de l'axe d'un fil de section $1{,}5\,\text{mm}^2$ parcouru par un courant d'un ampère.
3. On utilise deux fils parallèles pour alimenter un dipôle. Quelle relation simple a-t-on entre les intensités globales qui circulent dans chacun des fils ?
   (a) Représenter, sans calcul, l'allure des lignes de champ dans un plan orthogonal à la direction des films (d'axe Oz).
   (b) Les axes des deux fils sont distants de $2a$ (selon Ox). Quelles sont la direction et l'intensité du champ magnétique à la distance de d du centre du dispositif :
   - en $x = d, y = 0$,
   - en $x = 0, y = d$.
4. En travaux pratiques ou au laboratoire, on préfère utiliser un câble coaxial à la place de deux fils simples indépendants pour alimenter un dipôle. Un tel câble, supposé très long et rectiligne, comporte deux conducteurs cylindriques, de même axe (d'où son nom) : un fil central et un cylindre creux à l'extérieur.
   (a) Faire un schéma du dispositif.
   (b) Que vaut le champ magnétique à l'extérieur d'un câble coaxial alimenté par un courant continu ? Conclure sur son intérêt par rapport au dispositif de deux fils précédents.

Exercice 2 : Champ d'une nappe de courants

Le plan $z = 0$ est recouvert de fils électriques rectilignes selon $\vec{e_x}$, jointifs, et tous parcourus tous par le même courant I.



On l'observe à une distance suffisamment grande devant la taille des fils pour qu'on puisse le modéliser par une répartition uniforme de courants dirigée selon $+\vec{e_x}$, infinie selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.

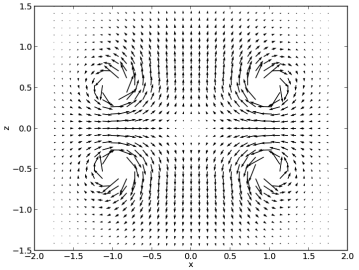
1. Identifier les invariances de la distribution de courants. En déduire la seule coordonnée dont peut dépendre le champ magnétique.
2. Identifier des plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de courants. En déduire la direction du champ magnétique hors du plan $z = 0$. Comparer également $\vec{B}(z)$ et $\vec{B}(-z)$ pour tout $z \neq 0$.
3. Déterminer par analogie avec le champ d'un fil le sens du champ magnétique. Que peut-on dire du champ $\vec{B}$ dans le plan des fils ?

Exercice 3 : Champ des bobines de Helmholtz

1. Déterminer l'intensité du champ au centre d'un dispositif de bobines de Helmholtz comportant chacune 50 spires, parcourues par un courant d'intensité 5A et de rayon $R = 30\,\text{cm}$
2. (a) Proposer une configuration utilisant plusieurs paires bobines de Helmholtz permettant de compenser le champ magnétique terrestre, *ie* assurer un champ magnétique total quasi nul dans un petit volume.
   (b) Quel devra être l'ordre de grandeur du courant si les bobines comportent 10 spires de rayon $R = 1\,\text{m}$.

Exercice 4 : Lecture de cartes de lignes de champ

1. Tracer succinctement la carte des lignes du champ dans le plan xOz d'une paire de bobines de Helmholtz d'axe Oz.
2. Comparer à la carte ci-contre et proposer une configuration de courants donnant la même structure.



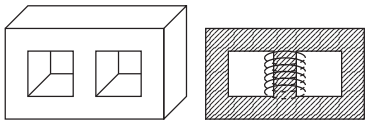
Exercice 5 : Lignes de champ magnétique dans des pièces polaires

1. On considère un tore ferromagnétique constituant la carcasse magnétique d'un transformateur. On admet que le matériau ferromagnétique guide les lignes de champ magnétique, et que les lignes de champ magnétique dans ce matériau sont nécessairement fermées.

   Le courant qui circule dans les enroulement créent localement un champ similaire à celui créé par un solénoïde infini.

   Dessiner l'allure des lignes de champ magnétique.

2. On rencontre fréquemment des transformateurs pour lesquels les enroulements sont bobinés autour de la partie centrale d'une pièce en fer dont la géométrie est représenté sur la figure.



Une géométrie usuelle pour la carcasse ferromagnétique d'un transformateur (perspective à gauche, coupe avec géométrie des enroulements à droite,).

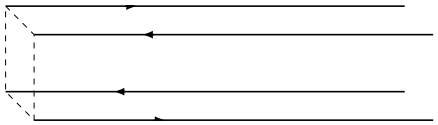
Indiquer l'allure des lignes de champ avec cette géométrie sur le schéma en coupe.

Exercice 6 : Piège de Ioffe-Pritchard

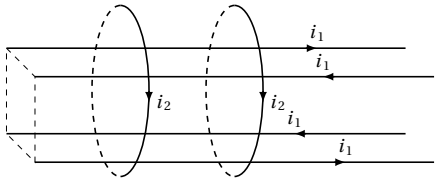
1. Rappeler l'allure des lignes de champ magnétique développées par un fil rectiligne très long (dans une région où l'on peut considérer ce fil comme infiniment long).

2. On considère deux barres parallèles à l'axe Oz, parcourues par des courants de même intensité, mais circulant en sens opposés. Les intersections des barres avec le plan $z = 0$ ont pour coordonnées respectives $x = a, y = 0$ et $x = -a, y = 0$. Représenter l'allure des lignes de champ magnétique. Que vaut le champ magnétique sur l'axe $x = 0, y = 0$.

3. On considère à présent quatre barres rectilignes toutes parallèles à l'axe Oz. Les intersections des barres avec le plan $z = 0$ ont pour coordonnées respectives $(x = a, y = a), (x = a, y = -a), (x = -a, y = -a)$ et $(x = -a, y = a)$. Elles sont parcourues par des courants d'intensité égale et dont les sens sont alternés.



Barres de Ioffe.



Piège de Ioffe Pritchard.

Déterminer l'allure des lignes de champ magnétique dans un plan perpendiculaire aux quatre barres. Indiquer ce que vaut le champ magnétique sur l'axe Oz.

4. On ajoute deux bobines contenues dans des plans orthogonaux aux quatre barres. Ces deux bobines sont parcourues par des courants de même intensité, circulant dans le même sens.

   (a) Sur l'axe du dispositif, quelle est la direction du champ magnétique ?

   (b) En comparant avec la situation précédente (absence des deux spires circulaires), le champ magnétique s'annule-t-il sur l'axe ?

   (c) Dans le contexte du piégeage magnétique d'atomes ultrafroids, on cherche à produire un minimum local de la norme du champ magnétique, ce minimum étant non nul. La distribution de courant proposée vérifie-t-elle ces propriétés ?

Exercice 7 : Champ tournant triphasé

Proposer un dispositif utilisant trois bobines identiques parcourues par des courants de même intensité déphasés réalisant un champ magnétique tournant à la pulsation ω. Quelle sera l'amplitude du champ si les phases des trois bobines sont respectivement $0; 2\pi/3, 4\pi/3$ (courant triphasé d'EDF).

Exercice 8 : Enroulements de spires

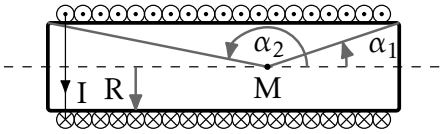
En utilisant le champ magnétique de la spire sur son axe, déterminer les champ magnétiques suivants (voir la figure 1).

1. Champ magnétique, sur son axe, d'un solénoïde fini constitué d'un enroulement de n spires jointives par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité I. On exprimera le champ au point M en fonction entre autres des angles α_1 et α_2 sous lesquels sont vus les faces d'entrée et de sortie du solénoïde.

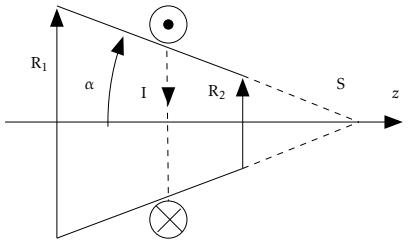
2. Champ magnétique, en son sommet S, d'un tronc de cône de demi-angle au sommet α. Les rayons extrêmes sont notés R_1 et R_2. On caractérise cette fois les spires par le rayon du fil dont elles sont formées, noté $a \ll R_2$. Elles sont parcourues par un courant d'intensité I.

On utilisera la formule donnant le champ élémentaire, sur son axe Oz, d'une bobine élémentaire de rayon r comportant un nombre infinitésimal $\mathrm{d}N$ de spires parcourues par un courant d'intensité I, après l'avoir justifiée.

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}N}{2r} \sin(\alpha)^3 \vec{e_z}$$



(a) Solénoïde fini.



(b) Enroulement sur un tronc de cône.

FIG. 1 : Structures dérivées de la spire.

Exercice 9 : Champ magnétique vu par un noyau atomique

On considère l'atome d'hydrogène.

1. Dans une approche classique (non quantique), on considère que l'électron d'un atome d'hydrogène suit une trajectoire circulaire, de rayon r autour du noyau. On note m_e la masse de l'électron. On rappelle que le champ magnétique créé en son centre par une spire circulaire de rayon a, contenue dans le plan $z = 0$ et parcourue par un courant d'intensité i vaut : $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2a}\vec{e_z}$.

   (a) Faire un schéma pour préciser l'orientation du courant et du champ magnétique en accord avec la règle de la main droite.

   (b) L'électron est animé d'une vitesse donnée en coordonnées cylindriques par $\vec{v} = v\vec{e_\theta}$. En raisonnant sur une période de révolution de l'électron autour du noyau, on peut décrire l'effet magnétique de l'électron par une spire circulaire équivalente. Déterminer l'intensité du courant circulant dans cette spire en fonction de r, v et q_e (charge de l'électron).

   (c) Exprimer le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe Oz en fonction de sa masse m_e, de v et r.

(d) On admet que le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe Oz vaut $\hbar = h/2\pi = 1{,}05\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$. En appliquant par ailleurs la deuxième loi de Newton à l'électron, obtenir les deux relations : $m_e r v = \hbar$, d'une part et $m_e \frac{v^2}{r} = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, d'autre part. En déduire les expressions de r et v en fonction de $\hbar, q_e, \varepsilon_0, m_e$.

(e) Exprimer, puis calculer le champ magnétique $\vec{B}(O)$ développé au niveau du noyau par l'électron dans son mouvement orbital, ainsi que le moment magnétique correspondant. On prendra $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\,\mathrm{m\cdot F^{-1}}$, $\mu_0 = 4\pi e - 7\mathrm{H\cdot m^{-1}}$.

2. (a) En physique quantique, l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène est décrit par une fonction d'onde associée à une distribution de présence de l'électron isotrope autour du noyau (et non répartie dans un plan comme dans le modèle classique). Que penser alors du champ magnétique développé par le noyau à cause du moment orbital de l'électron ?

(b) En fait, l'électron développe un champ magnétique non nul sur le noyau. À quelle grandeur typiquement quantique ce champ magnétique est-il associé ?

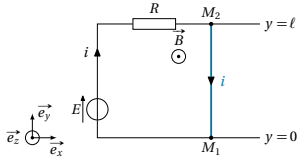
(c) Proposer par analyse dimensionnelle une valeur du moment magnétique utilisant les constantes utilisées dans le modèle classique. La vraie valeur dépend de l'atome mais uniquement par un nombre sans dimension de l'ordre de l'unité. En déduire un ordre de grandeur de l'aimantation et du champ magnétique à la surface d'un aimant permanent en fer. On donne la masse molaire $M = 55{,}8\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et sa masse volumique $\rho = 7{,}9\cdot10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Force de Laplace

Exercice 10 : Rail de Laplace

1. On considère une barre M_1M_2 qui glisse sans frottement sur des rails de Laplace

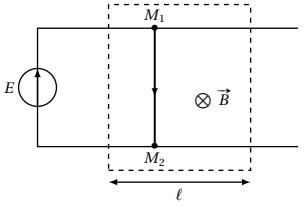
Le circuit est orienté dans le sens indiqué pour l'intensité i sur la figure ci-après. On suppose que la résistance totale du circuit fermé vaut R.



(a) Exprimer l'intensité i en fonction de E et R.

(b) Exprimer la force de Laplace qui s'exerce sur la barre en fonction de E, R, B, ℓ et d'un vecteur unitaire.

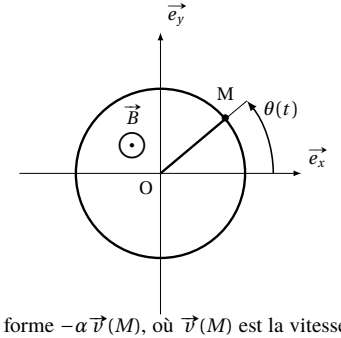
2. On considère la configuration ci-contre, dans laquelle le champ magnétique est nul sauf dans la zone délimitée par les traits interrompus, de largeur ℓ égale à la longueur de la barre, où il est uniforme de norme B_0. On note de nouveau R la résistance totale du circuit. La barre, de masse m, est lancée de la gauche vers la droite et arrive avec une vitesse v_0 dans la zone de champ magnétique. Déterminer le temps qu'elle met pour en sortir. On néglige tout frottement mécanique.



Exercice 11 : Tige en rotation

On considère une tige rectiligne en rotation autour de l'axe Oz.

On note J le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Oz. Une extrémité coïncide avec l'origine O du repère, et l'autre extrémité glisse sur un cercle conducteur, de rayon a, fixe dans le référentiel d'étude. On impose une différence de potentiel U entre l'extrémité en O et le cercle conducteur. La tige a une résistance électrique R. L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e_z}$.



Outre les forces de Laplace, la tige subit une force de frottement de la forme $-\alpha\vec{v}(M)$, où $\vec{v}(M)$ est la vitesse de l'extrémité de la tige au niveau du contact sur le cercle conducteur.

1. (a) Exprimer le moment résultant des forces de Laplace exercées sur la tige par rapport à l'axe Oz en fonction de i, a, B.

(b) Exprimer le moment des forces de frottement par rapport à l'axe Oz en fonction de α, a, ω, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation.

2. Appliquer le théorème du moment cinétique à la tige pour obtenir une équation différentielle sur $t \mapsto \omega(t)$, vitesse angulaire de rotation autour de l'axe Oz. Introduire un temps caractéristique τ et une vitesse angulaire asymptotique ω_∞.

3. La tige est supposée immobile à la date $t = 0$. Exprimer la vitesse angulaire $\omega(t > 0)$ et tracer l'allure du graphe correspondant.

Exercice 12 : Définition de l'ampère

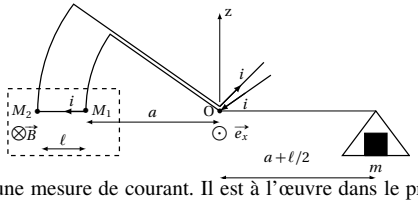
Vérifier que la définition de l'ampère, donnée ci-après, est bien compatible avec l'expression du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini.

« Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs, une force linéaire égale à $2\cdot10^{-7}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. »

Exercice 13 : Balance de Cotton

Le dispositif de la Balance de Cotton permet d'équilibrer le poids d'un objet par la force de Laplace exercée sur un conducteur.

On obtient un équilibre entre le moment du poids de la masse m à droite et le moment de la force de Laplace exercée sur la partie droite du circuit de gauche soumis au champ magnétique $\vec{B} = -B\vec{e_x}$ qui règne dans la partie en pointillés. Les masses autres que m sont négligées. Le champ de pesanteur est uniforme et vaut $\vec{g} = -g\vec{e_z}$.
Exprimer la relation entre m, g, a, b, ℓ, B et i à l'équilibre.



Ce dispositif permet d'obtenir un étalon de masse basé sur une mesure de courant. Il est à l'œuvre dans le projet de la « balance du Watt » visant à redéfinir le kg. Il faut ensuite définir un étalon de courant basé sur des phénomènes quantiques.

Exercice 14 : Couples sur un triangle, sur un cercle

Déterminer le couple exercé par un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e_x}$ sur une spire parcourue par un courant d'intensité i en rotation par une liaison pivot d'axe $\vec{e_z}$ dans les deux cas suivants :

- triangle équilatéral de côté a dont l'axe $\vec{e_z}$ est selon une hauteur,
- cercle de rayon a dont l'axe $\vec{e_z}$ est un diamètre.

On exprimera le couple en fonction, entre autres, de l'angle θ entre le plan de la spire et le plan yOz.

- On effectuera le calcul explicite en sommant les forces de Laplace élémentaires.
- On vérifiera le résultat en utilisant le moment magnétique associé.

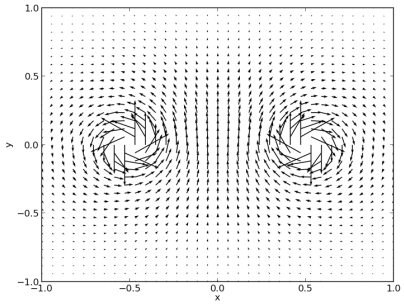
Correction de l'exercice 1

1. Les lignes de champ magnétique sont ici des cercles contenus dans les plans orthogonaux à l'axe du fil et centrés sur le fil.

2. Avec une section $s = 1{,}5\,\text{mm}^2$, le rayon du fil vaut $a = \sqrt{s/\pi} = 0{,}69\,\text{mm}$. On est donc à l'extérieur du fil, si l'on prend $d = 1{,}0\,\text{cm}$. En appliquant la formule $B_\theta = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$, on obtient $B_\theta = 2{,}0\cdot 10^{-5}\,\text{T}$.

3. (a) La loi des nœuds impose que les deux intensités sont égales mais circulent en sens opposés.

   (b) On obtient l'allure ci-contre.

   (c) Pour le champ en un point M on utilise la formule $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi O_p M}\vec{e_\theta}_p$, avec $p = 1, 2$. Les points $O_1(-a, 0)$ et $O_2(a, 0)$ sont les intersections de chacun des fils dans le plan étudié. Posons $I_1 \equiv I$, on a alors $I_2 = -I$.

   cas $x = d > a, y = 0$ **:** on a $\vec{e_\theta}_1 = \vec{e_\theta}_2 = \vec{e_y}$, $O_1M = a + d$ et $O_2m = d - a$, soit :

   $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{a+d} - \frac{1}{d-a}\right)\vec{e_y} = -\frac{\mu_0 I a}{\pi(d^2 - a^2)}$$

   cas $x = d < a, y = 0$ on a toujours $\vec{e_\theta}_1 = \vec{e_y}$ et $O_1M = d + a$ mais $\vec{e_\theta}_2 = -\vec{e_y}$ et $O_2M = a - d$, soit :

   $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{a+d} + \frac{1}{a-d}\right)\vec{e_y} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(a^2 - d^2)}\vec{e_y}$$

   cas $x = 0, y = d$ On a cette fois ci $O_1M = O_2M = \sqrt{a^2 + d^2}$ et on vérifie que $\vec{e_\theta}_1 - \vec{e_\theta}_2 = \frac{2a}{\sqrt{a^2+d^2}}\vec{e_y}$. On a donc :

   $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{\pi(a^2 + d^2)}\vec{e_y}$$

4. (b) De nouveau, les deux courants ont même intensité et circulent en sens opposés. Le fait qu'ils soient coaxiaux assure cependant que le champ magnétique, à l'extérieur du câble, est nul car c'est le même que celui d'un unique fil parcouru par un courant nul. Le câble coaxial crée donc moins de perturbations électromagnétiques sur son environnement qu'une paire de fils bananes.

Correction de l'exercice 2

1. La distribution de courants est invariante par translation selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$: le champ magnétique ne peut donc dépendre que de la coordonnée z.

2. Pour tout point M :

   - le plan $M, \vec{e_x}, \vec{e_z}$ est un plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique doit donc lui être orthogonal, soit être dirigé selon $\vec{e_y}$;
   - de même le plan $M, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ est un plan de symétrie avec changement de signe pour la distribution de courants. Le champ magnétique doit dont lui être tangent, ce qui est bien en accord avec le résultat précédent ;
   - le plan $z = 0$ est un plan de symétrie pour la distribution de courants, il doit donc être un plan de symétrie avec changement de signe pour le champ $\vec{B}$, ce qui implique :
     - $\vec{B}(-z) = -\text{Sym}_{z=0}\left(\vec{B}(z)\right)$ soit, puisque $\vec{B}(z) \propto \vec{e_y}$, $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$.
     - $\vec{B}(z = 0)$ doit être orthogonal au plan $z = 0$: comme il doit être selon $\vec{e_y}$, il est nécessairement nul.

3. Dans le cas d'un courant selon $+\vec{e_y}$ pour un fil de coordonnées $x = 0$ et $z = 0$, on sait que le champ magnétique en $z = 0$ sera selon $-\vec{e_y}$. Il en sera de même pour la composante du champ selon $\vec{e_y}$ de tout point du demi-espace $z > 0$. En considérant la réunion de tous les fils constituant le plan, le champ magnétique total sera

   - selon $-\vec{e_y}$ pour $z > 0$
   - et puisqu'on a établi que $B(z)$ est impaire, selon $+\vec{e_y}$ pour $z < 0$.

Correction de l'exercice 3

On utilise la formule $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 N I}{2R}\sin^3(\alpha)$ pour le champ de N bobines de rayon R en un point de son axe d'où elle est vue sous l'angle α.

1. Au centre du dispositif, une bobine est vue sous l'angle α tel que $\sin(\alpha) = R/\sqrt{R^2 + R^2/4} = 2/\sqrt{5}$ et l'autre sous l'angle $\beta = \pi - \alpha$. Comme $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ leurs intensités s'ajoutent et on obtient :

   $$\|\vec{B}\| = \frac{N\mu_0 I}{R} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{8N\mu_0 I}{5\sqrt{5}R} = 7{,}5\cdot 10^{-4}\,\text{T} = 7{,}5\,\text{G}.$$

2. (a) Il suffit d'utiliser une paire de bobines selon chacun des trois axes Ox, Oy et Oz et d'ajuster l'intensité dans chacune pour comparer chacune des composantes du champ terrestre.

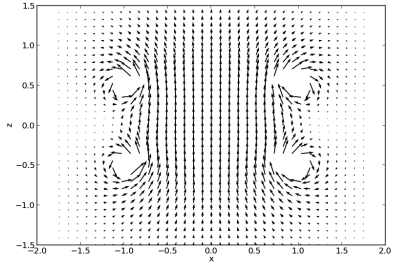
   (b) L'intensité de la composante horizontale du champ terrestre est, sous nos latitudes, de l'ordre de 0,2 G. On devra donc avoir :

   $$I_{x,y,z} = \frac{5\sqrt{5}RB_{x,y,z}}{16N\mu_0} \simeq 1{,}1\,\text{A}.$$

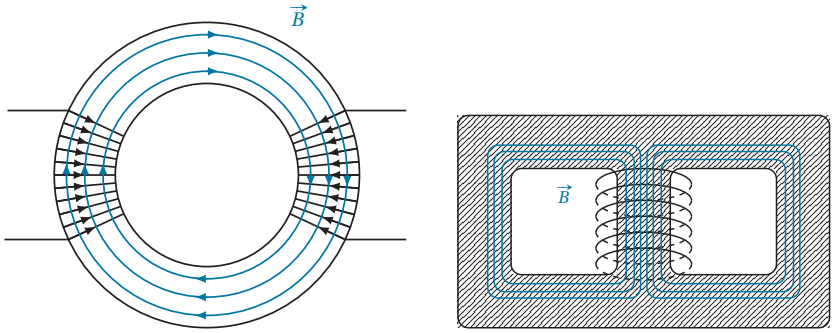
Correction de l'exercice 4

1. La carte du champ d'une paire de bobines de Helmoltz dans tout plan contenant leur axe commun de symétrie de révolution est donnée ci-contre.

2. La carte proposée est celle d'une configuration anti-Helmholtz dans laquelle les bobines sont disposées de la même manière mais sont parcourues par des courants circulant dans des sens opposés.



Correction de l'exercice 5



(a) Allure des lignes de champ magnétique dans la carcasse magnétique d'une transformateur de géométrie toroïdale. (b) Allure des lignes de champ d'un transformateur de géométrie toroïdale..

1. Avec une carcasse magnétique de géométrie toroïdale, les lignes de champ celles d'un solénoïde infini qu'on aurait courbé, comme représenté sur la Figure 2a.

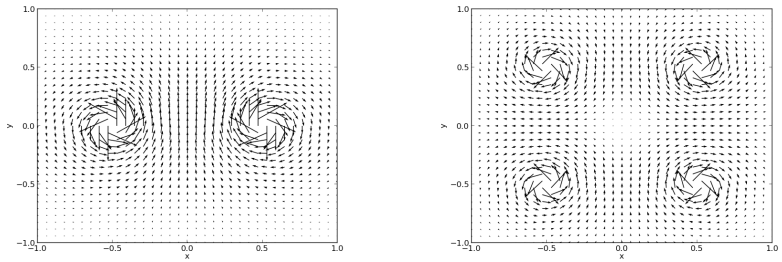
2. Le courant dans les fils crée un champ magnétique colinéaire à l'axe des spires dans la partie centrale. La matière ferromagnétique guide les lignes de champ, qui reviennent vers le solénoïde central en passant par les parties latérales. L'allure des lignes de champ sur la Figure en coupe est représentée figure 2b.

Correction de l'exercice 6

1. Avec un unique fil rectiligne infini, les lignes de champ sont des cercles, contenus dans des plans orthogonaux au fil et centrés sur le fil.

2. Avec deux barres, on somme les deux contributions. Les champs s'ajoutent en $(x = 0, y = 0)$, comme représenté sur la figure suivante.

3. Avec les quatre barres proposées, on obtient un champ magnétique nul sur l'axe du dispositif, comme représenté sur la figure suivante.



4. (a) Le champ magnétique créé par les barres s'annule sur l'axe. La contribution restante est celle des spires, qui produisent un champ dirigé selon l'axe Oz.

   (b) Avec les deux bobines circulaires, le champ magnétique devient non nul et selon Oz, sur l'axe du dispositif.

   (c) Avec les quatre barres seules, on produit un champ magnétique dont la norme s'annule sur l'axe et croît au voisinage de l'axe lorsqu'on s'en éloigne. Grâce aux deux bobines, on a, d'une part, un minimum non nul sur l'axe (composante du champ magnétique selon Oz) et, d'autre part, on produit un minimum de la norme du champ magnétique au centre du dispositif, dans le plan équidistant des deux bobines, pour qu'elles soient séparées d'une distance supérieure à celle de la configuration de Helmholtz. Dans le contexte du piégeage magnétique des atomes ultrafroids les quatre barres permettent un confinement radial et les deux bobines assurent le confinement axial.

   Remarque : On utilise souvent un autre dispositif pour les bobines formé :

   - d'une paire de bobines de Helmholtz formant un champ axial quasiment uniforme sur l'ensemble du dispositif,
   - d'une paire de bobines identiques de même axe mais parcourues par des courants de me intensité mais de sens opposés. Elles forment un champ nul en leur centre mais dont la norme croît rapidement quand on se déplace le long de l'axe.

   Le champ sur l'axe ainsi réalisé possède donc également une norme minimale non nulle au centre du dispositif et on peut régler séparément la valeur de ce minimum et la «rapidité» avec laquelle la norme croît quand on s'éloigne du centre en choisissant indépendamment les courants dans chaque paire de bobines.

Correction de l'exercice 7

Il suffit de placer les bobines équidistantes sur un cercle de centre O, à 120° les unes des autres, leurs axes pointant vers le centre O. On vérifie, par une construction de Fresnel, qu'en introduisant un déphasage de $2\pi/3$ sur chaque bobine, on obtient un champ d'amplitude égale à $3/2$ de l'amplitude du champ d'une bobine.

Correction de l'exercice 8

1. Le champ d'une spire sur son axe de symétrie de révoultion est dirigé selon cet axe : le champ total est donc lui aussi selon cet axe, qu'on note $\vec{e_z}$.

   On considère les spires comprises entre les angles α et $\alpha+\mathrm{d}\alpha$, leur nombre est noté $\mathrm{d}N(\alpha)$ et le champ élémentaire qu'elles créent est :

$$\mathrm{d}B_z\vec{e_z} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}N_\alpha}{2R}(\sin(\alpha))^3.$$

   Le nombre $\mathrm{d}N_\alpha$ est $n|\mathrm{d}z| = -n\,\mathrm{d}z$, avec n le nombre de spires par unité de longueur et $-\mathrm{d}z$ la largeur selon $\vec{e_z}$ correspondant à la largeur angulaire $\mathrm{d}\alpha$ (car $\mathrm{d}z \leqslant 0$ quand α est décroissant).

   En notant z_M l'abscisse du point M et z celle de la spire repérée par l'angle α, on a :

$$\mathrm{cotan}(\alpha) = \frac{z-z_M}{R} \to -\frac{1}{\sin(\alpha)^2}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{R} \to \mathrm{d}N_\alpha = \frac{nR}{\sin(\alpha)^2}\,\mathrm{d}\alpha.$$

   On exprime alors $\mathrm{d}B_z$ en fonction uniquement des variations de l'angle α :

$$\mathrm{d}B_z = \frac{n\mu_0 I}{2}\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \to B_z = \int \mathrm{d}B_z = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{n\mu_0 I}{2}\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{n\mu_0 I}{2}(\cos(\alpha_1)-\cos(\alpha_2)).$$

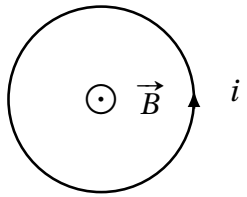
   On retrouve bien l'expression du champ magnétique d'un solénoïde infini ; $\mu_0 nI$; pour $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$.

2. Pour l'enroulement torique, on décrit la bobine plate comprise entre r et $r+dr$. On a alors : $\mathrm{d}N = \frac{dl}{a} = \frac{dr}{a\sin\alpha}$. On calcule le champ créé en S. Comme toutes les bobines sont vues sous le même angle α, on obtient : $\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{2r}\frac{\mathrm{d}r}{a\sin\alpha}\sin^3\alpha$, soit $B_z = \frac{\mu_0 I \sin^2\alpha}{2a}\ln\frac{R_1}{R_2}$.

Correction de l'exercice 9

1. (a) et (b)

   On obtient la configuration de la figure ci-contre.
   Orientons la spire dans le sens défini par le déplacement de l'électron. On applique la relation $i = q/T$ avec q égal à la charge de l'électron et T la période de révolution de l'électron autour du noyau. Cette période vaut $T = \frac{2\pi r}{v}$, on a donc $i = \frac{q_e v}{2\pi r}$. L'intensité obtenue est négative, puisque sa charge électrique est négative.



   (c) Le moment cinétique par rapport au point O, pris sur le noyau, vaut :

$$\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e_r} \wedge mv\vec{e_\theta} = rmv\vec{e_z}.$$

   Donc le moment cinétique de l'électron par rapport à l'axe Oz vaut

$$\sigma_{/Oz}(M) = \overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)\cdot\vec{e_z} = rmv.$$

   (d) On admet la relation (postulat de Bohr) $\sigma_{/Oz}(M) = rmv = \hbar$ pour l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. On obtient la deuxième relation en écrivant que l'électron est soumis à la force électrique coulombienne, sur une trajectoire circulaire. Sur une telle trajectoire, l'accélération centripète peut s'écrire sous la forme $\vec{a} = -v^2/r\vec{e_r}$.

$$m\vec{a} = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} \to \frac{mv^2}{r} = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

   On résout le système 2×2 portant sur les deux inconnues r et v, on obtient :

$$v = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar} \qquad r = \frac{\hbar^2}{m\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}}.$$

   (e) On reporte ces deux expressions dans $B = \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\mu_0 q_e v}{2r\times 2\pi r} = \frac{\mu_0 q_e v}{4\pi r^2}$. On obtient finalement :

$$B = \frac{\mu_0 q_e}{4\pi}\times\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\times\frac{\frac{m_e^2 q_e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}}{\hbar^4} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_e^2 q_e^7}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{1}{\hbar^5}.$$

   On calcule par ailleurs la norme du moment magnétique m_B (à ne pas confondre avec la masse m), sur la trajectoire circulaire de rayon r :

$$m_B = |i|\pi r^2 = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

   On constate que l'un comme l'autre ne dépendent pas des paramètres cinématiques de la trajectoire (rayon, vitesse) mais uniquement des constantes fondamentales.

   On calcule enfin : $r = 0{,}53\cdot10^{-10}\,\mathrm{m}, v = 2{,}2\cdot10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et $\|\vec{B}\| = 13\,\mathrm{T}$, $m_b = 9{,}274\,009\,992\,07\cdot10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}$
   L'intensité du champ est très importante mais décroît très rapidement, avec une distance caractéristique de l'ordre d'1 Å.

2. (a) La fonction d'onde de l'électron dans l'état fondamental correspond en fait à un moment cinétique orbital nul. En conséquence, la contribution de ce mouvement orbital au champ magnétique créé au niveau du proton est nulle.

   Remarque : Le moment magnétique dû au moment cinétique orbital pourra en revanche être non nul pour les états excités (de nombre quantique orbital l non nul) qui ne présentent pas la symétrie sphérique.

   (b) Outre son moment cinétique orbital, l'électron possède un moment cinétique « intrinsèque », dit aussi moment cinétique de spin. À cause de cette contribution typiquement quantique au moment cinétique total, il développe effectivement un champ magnétique au niveau du proton. Les études précises du spectre de l'atome d'hydrogène permettent d'en tester expérimentalement les conséquences.

   (c) Les moments cinétiques orbital et de spin de l'électron seront tous quantifiés par $\hbar$. Les calculs précédents assurent que le moment magnétique sera de l'ordre de $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ (on a laissé le facteur 2 car il intervient effectivement dans le traitement quantique rigoureux). Cette constante est nommée « magnéton de Bohr ».

   On imagine que dans un échantillon de fer aimanté,

   - chaque atome contribue pour un électron (en réalité ça dépend de la structure électronique)
   - à cet électron est associé le moment magnétique $\hbar$ (en réalité on aura un nombre de l'ordre de l'unité en facteur),
   - on peut sommer tous les moments magnétiques pour obtenir le moment magnétique total ; en réalité ce n'est valable qu'à grande distance : au voisinage de la surface de l'échantillon on obtiendrait le champ magnétique en sommant les contributions de chaque atome, certains étant plus proches que d'autres.

   Sous ces approximations l'aimantation $\mathcal{M}$ sera donc :

$$\mathcal{M} = \frac{\mu_B \rho \mathcal{N}_\mathrm{A}}{M} = 7{,}878\,753\,865\,97\cdot10^{5}\,\mathrm{A\cdot m^{-1}}$$

   Dimensionnellement, le champ magnétique à la surface sera $\mu_0\mathcal{M} = 9{,}900\,734\,105\,92\cdot10^{-1}\,\mathrm{T}$,

   100 fois inférieure aux ordres de grandeur observables expérimentalement en raison des simplifications extrêmes utilisées, et de fait que l'aimantation n'est pas totale.

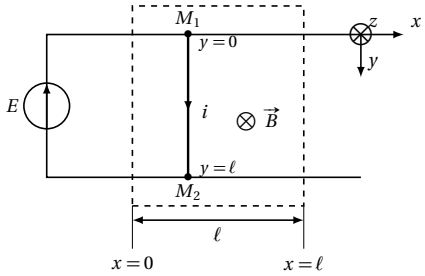
Correction de l'exercice 10

1. (a) On a immédiatement $i = E/R$.

   (b) La force de Laplace est alors $\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = i\overrightarrow{M_2M_1}\wedge B\vec{e_z} = -i\ell B\vec{e_x}$ car $\overrightarrow{M_2M_1} = -\ell\vec{e_y}$. On en déduit $\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = -\frac{E\ell B}{R}\vec{e_x}$.

2. On choisit le repère de la figure ci-contre pour que la force soit selon $+\vec{e_x}$ pour $E \geqslant 0$.

L'intensité, ainsi que l'ensemble du circuit est orientée dans le sens de la flèche représentée sur la même figure. La force de Laplace est ici immédiatement $\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = i\overrightarrow{M_1M_2} \wedge B\vec{e_z} = i\ell B\vec{e_x}$ car ici $\overrightarrow{M_1M_2} = \ell\vec{e_y}$.



On détermine l'intensité en écrivant la loi d'Ohm dans le circuit fermé $E = Ri$. On a donc finalement :

$$\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = \frac{E\ell B}{R}\vec{e_x}.$$

La dynamique de la barre est régie par la deuxième loi de Newton. Compte tenu de l'hypothèse de glissement sans frottement, la seule force pertinente pour le mouvement selon x est la force de Laplace. Avec le signe de la tension imposée, la tige est accélérée vers la droite. On a, tant que la barre est dans la zone de champ magnétique :

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{E\ell B}{R}. \tag{1}$$

On obtient, en intégrant deux fois :

$$v_x(t) - v_0 = \frac{E\ell B}{mR}t \to \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + \frac{E\ell B t}{mR} \to x(t) = v_0 t + \frac{E\ell B t^2}{2mR}.$$

La date de sortie de la zone de champ magnétique correspond à $x = \ell$. On résout l'équation du second degré en t suivante

$$v_0 t + \frac{E\ell B t^2}{2mR} = \ell \to t^2 + \frac{2Rmv_0}{E\ell B}t - \frac{2mR}{EB} = 0,$$

dont les racines sont : $t = -\dfrac{mRv_0}{EB\ell} \pm \sqrt{\left(\dfrac{mRv_0}{E\ell B}\right)^2 + \dfrac{2mR}{EB}}$. On retient la racine positive :

$$t = -\frac{mRv_0}{EB\ell} + \sqrt{\left(\frac{mRv_0}{E\ell B}\right)^2 + \frac{2mR}{EB}}.$$

Correction de l'exercice 11

1. (a) La force de Laplace élémentaire qui s'applique sur une portion de la tige en rotation est :

$$\delta\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = i\,\mathrm{d}r\vec{e_r} \wedge B\vec{e_z} = -i\,\mathrm{d}rB\vec{e_\theta},$$

en notant i l'intensité du courant parcourant la tige du point O vers le cercle conducteur. Comme le vecteur $\vec{e_\theta}$ est le même tout le long de la tige, la force par unité de longueur $\delta\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}/\,\mathrm{d}r = -iB\vec{e_\theta}$ est uniforme le long de la tige. Le moment par rapport à Oz de la résultante sur toute la tige est donc le même que si la résultante s'appliquait au centre de la tige. La résultante est :

$$\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = \int_{r=0}^{a} -i\,\mathrm{d}rB\vec{e_\theta} = -iaB\vec{e_\theta}.$$

Comme elle est orthogonale à OM et s'applique en $r = a/2$, le bras de levier est $a/2$ et on a finalement, comme le moment par rapport à Oz est négatif :

$$\mathcal{M}_{/Oz}(\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}) = -iBa \times \frac{a}{2} = -\frac{iaB^2}{2}.$$

(b) La vitesse du point de glissement de la tige sur le cercle conducteur est orthoradiale et peut s'écrire $\vec{v} = a\omega\vec{e_\theta}$, en fonction de la vitesse angulaire de rotation ω. La force de frottement a donc un bras de levier de a et un moment négatif, soit :

$$\mathcal{M}_{/Oz}(\vec{F}_f) = -\alpha a^2\omega.$$

2. On applique le théorème du moment cinétique scalaire (en projection sur Oz) à la barre, solide en rotation autour de Oz :

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{iBa^2}{2} - \alpha a^2\omega \to \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha a^2}{J}\omega + \frac{ia^2B}{2J} = 0,$$

qu'on écrit sous la forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_\infty}{\tau}, \quad \text{avec : } \tau = \frac{J}{a^2} \qquad \omega_\infty = -\frac{iB}{2\alpha}.$$

3. La solution de cette équation, vérifiant la condition initiale $\omega(0) = 0$ est la relaxation exponentielle vers la valeur asymptotique, en un temps caractéristique τ :

$$\omega(t) = \omega_\infty(1 - e^{-t/\tau}).$$

Correction de l'exercice 12

On utilise la formule du champ d'un fil infini $\vec{B} = \mu_0 I/(2\pi r)\vec{e_\theta}$ donnant l'intensité du champ à la distance r du fil. Notons $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire dirigeant les fils, et d la distance entre les deux fils, selon $\vec{e_x}$. Un élément du fil 2, de longueur $\mathrm{d}r$, situé à la distance d du fil 1 subit la force de Laplace :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = i\,\mathrm{d}z\vec{e_z} \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e_y} = -\frac{\mu_0 I^2\,\mathrm{d}z}{2\pi d}\vec{e_x}.$$

La force par unité de longueur $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}/\,\mathrm{d}z$ a pour norme $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$. On vérifie qu'on a bien $2\cdot10^{-7}$ N pour $I = 1$ A et $d = 1$ m.

Remarque : On a supposé pour ce calcul que les courants étaient de même sens dans chaque fil, ce qui donne une force attractive. Elle sera répulsive dans le cas contraire.

Correction de l'exercice 13

On étudie les moments par rapport à l'axe Ox.

- Le poids de la masse m s'exerce en son barycentre G. Quand le bras qui la supporte est horizontal son bras de levier est donc $a+\ell/2$ et son moment est négatif et vaut :

$$\mathcal{M}_{/Oz}(\vec{P}) = -mg(a+\ell/2)$$

- Considérons le moment résultant des forces de Laplace sur la partie gauche :

  portions en arc de cercle : en chaque point la force de Laplace par unité de longueur est radiale, son moment par rapport à l'axe est donc nul.

  zone (M_1M2) **:** la force par unité de longueur est :

$$\frac{\delta\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}}{\mathrm{d}r} = -i\vec{e_y}\wedge -B\vec{e_x} = -iB\vec{e_z}.$$

  Comme elle est uniforme, son moment par rapport à l'axe est le même que celui de sa résultante appliquée en son centre d'inertie, à la distance $a+\ell/2$ de l'axe. La résultante valant immédiatement $-iB\ell\vec{e_z}$, son moment est alors :

$$\mathcal{M}_{/Oz}(\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}) = +i\ell B(a+\ell/2).$$

  autres portions : les autres portions sont suffisamment loin de la zone où est créé le champ pour que leur contribution soit négligeable.

  Le théorème du moment cinétique appliqué à l'ensemble du solide en rotation assure que l'équilibre sera possible pour :

$$iB\ell(a+\ell/2) = (a+\ell/2)mg \to iB\ell = mg.$$

Correction de l'exercice 14

On note θ l'angle entre le plan vertical de la spire et le plan (yOz).

triangle équilatéral : La force de Laplace par unité de longueur est uniforme sur chaque côté du triangle, son moment par rapport à l'axe est donc le même que celui de la résultante appliquée en son milieu.

- Sur le côté horizontal, $\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}$ est selon $\vec{e_z}$, son moment par rapport à cet axe est donc nul.
- En notant $[M_1M_2]$ et $[M_1M_3]$ les autres côtés, on a :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = a\left[\sqrt{3}/2\vec{e_z} + \left(\cos(\theta)\vec{e_y} - \sin(\theta)\vec{e_x}\right)/2\right]$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = a\left[\sqrt{3}/2\vec{e_z}\left(-\cos(\theta)\vec{e_y} + \sin(\theta)\vec{e_x}\right)/2\right]$$

  Les résultantes des forces de Laplace correspondantes sont donc, comme le courant circule en sens inverse dans les deux branches :

$$\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}(\overrightarrow{M_1M_2}) = -i\overrightarrow{M_1M_2}\wedge B_0\vec{e_x} = aiB_0\left[\sqrt{3}/2\vec{e_y} - \cos(\theta)\vec{e_z}\right]$$
$$\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}(\overrightarrow{M_1M_3}) = i\overrightarrow{M_1M_3}\wedge B_0\vec{e_x} = aiB_0\left[-\sqrt{3}/2\vec{e_y} - \cos(\theta)\vec{e_z}\right]$$

  Les composantes selon $\vec{e_z}$ ont un moment nul par rapport à cet axe et on ne doit donc considérer que celles selon $\vec{e_y}$. Elles s'exercent chacune au milieu du segment, les bras de levier sont donc $a\sin(\theta)/4$ et les moments correspondants sont bien sûr égaux. En sommant ces deux contributions, on obtient :

$$\mathcal{C}_{/Oz} = -\frac{\sqrt{3}a^2iB_0\sin(\theta)}{4}.$$

  On retrouve bien le $\vec{m}\wedge\overrightarrow{B_0}$, pour un moment magnétique $\vec{m} = ia^2\sqrt{3}\left(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}\right)/4$, avec l'aire du triangle $a^2\sqrt{3}/4$.

cercle : ici la force par unité de longueur n'est pas uniforme, il est donc nécessaire d'intégrer les moments élémentaires. On utilise les coordonnées polaires d'angle α centre O le centre du cercle dans le plan vertical le contenant. En choisissant $\alpha = 0$ au point le plus bas du cercle, on peut donc écrire, pour tout point M du cercle :

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{e_r}(\alpha) = a\left(-\cos(\alpha)\vec{e_z} + \sin(\alpha)\left[\cos(\theta)\vec{e_y} - \sin(\theta)\vec{e_x}\right]\right).$$

On a de même :

$$\vec{e_\theta}(\alpha) = \frac{\mathrm{d}\vec{e_r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \sin(\alpha)\vec{e_z} + \cos(\alpha)\left[\cos(\theta)\vec{e_y} - \sin(\theta)\vec{e_x}\right]$$

La force de Laplace élémentaire sur $a\,\mathrm{d}\alpha\vec{e_\theta}(\alpha)$ est alors :

$$\delta\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}} = ia\,\mathrm{d}\alpha\vec{e_\theta}(\alpha)\wedge B_0\vec{e_x} = ia\,\mathrm{d}\alpha B_0\left(\sin(\alpha)\vec{e_y} - \cos(\alpha)\cos(\theta)\vec{e_z}\right).$$

Son moment par rapport à l'axe Oz est (en ne conservant que les composantes orthogonale às $\vec{e_z}$) :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{M}_{/Oz}(\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}) &= (\overrightarrow{OM}\wedge\delta\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}})\cdot\vec{e_z} = ia^2B_0(\sin(\alpha)\left[\cos(\theta)\vec{e_y} - \sin(\theta)\vec{e_x}\right]\wedge\sin(\alpha)\vec{e_y})\cdot\vec{e_z}\\ &= -ia^2B_0\sin(\theta)\sin^2(\alpha).\end{aligned}$$

En intégrant sur $\theta\in[0;2\pi]$, on obtient bien :

$$\mathcal{M}_{/Oz}(\overrightarrow{F_{\mathcal{L}a}}) = -iB_0\pi a^2\sin(\theta) = \vec{m}\wedge\overrightarrow{B_0},$$

avec $\vec{m} = i\pi a^2\left(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}\right)$.