Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.

Problème 1 : Le Magnétron

On étudie dans ce problème quelques caractéristiques d'un dispositif destiné à produire des ondes électromagnétique micro-ondes (dans un four, un radar…), de longueur d'onde de l'ordre de $\lambda \simeq 1\,\mathrm{cm}$.
Ils utilisent le mouvement d'électrons dont on admet qu'il peut émettre de telles ondes s'il est de vecteur accélération non nul.
Données :

constantes charge élémentaire $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; masse de l'électron $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; vitesse de la lumière $c = 3{,}0\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; la permittivité diélectrique du vide ε_0 vérifie $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0\cdot 10^{9}\,\mathrm{SI}$.

Géométrie rayon de la cathode $a = 1{,}0\,\mathrm{mm}$; rayon de l'anode $b = 1{,}0\,\mathrm{cm}$.

I Généralités

On rédigera rapidement, mais rigoureusement, ces questions proches du cours.

1. Montrer que le mouvement d'un électron, de charge $-e$ et de masse m_e dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_0 = B_0\vec{e_z}$ (avec $B_0 > 0$) est circulaire uniforme si son vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est initialement perpendiculaire à la direction du champ magnétique. On précisera le rayon de la trajectoire ainsi que la vitesse angulaire et on utilisera un schéma pour indiquer le sens de parcours.

2. On considère un système de deux électrodes planes et parallèles entre lesquelles on admet qu'il règne un champ électrique uniforme et stationnaire $\vec{E}_0 = E_0\vec{e_x}$.

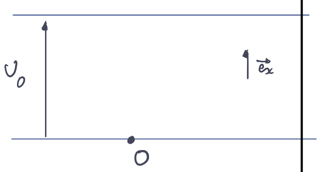


Fig. 1

On introduit des électrons avec une vitesse négligeable au point O d'une des électrodes. Déterminer le signe de la tension U_0 pour que les électrons soient accélérés vers l'autre électrode. Établir l'énergie cinétique des électrons quand ils atteignent l'autre électrode. On rappellera l'expression de l'énergie potentielle électrique en fonction du potentiel électrique V.

II Approche énergétique de l'énergie émise par un électron en mouvement

Le mouvement de particules chargées peut être responsable de l'émission d'une onde électromagnétique. On étudie la puissance de l'onde émise. Aucune connaissance sur la structure des ondes électromagnétiques n'est nécessaire. Cette section et la suivante peuvent être abordées indépendamment l'une de l'autre.

On admet que la puissance de l'onde émise par une charge q et d'accélération de norme a a pour expression, dans le cadre non relativiste :

$$\mathscr{P} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \qquad (1)$$

3. On considère un électron d'énergie cinétique $\mathscr{E}_0$ en mouvement circulaire uniforme dans un champ magnétostatique uniforme de norme B_0. On suppose que son mouvement est non relativiste. On considère tout d'abord que son mouvement demeure circulaire uniforme malgré l'émission de l'onde électromagnétique.

   (a) Établir l'expression de la puissance $\mathscr{P}$ qu'il rayonne. L'énergie cinétique $\mathscr{E}_0$ a été acquise en traversant l'espace entre deux électrodes entre lesquelles est établie une tension notée U_0. Donner l'expression de $\mathscr{P}$ en fonction de U_0, B_0 et des constantes fondamentales pertinentes. Calculer sa valeur pour $U_0 = 5{,}0\,\mathrm{kV}$ et $B_0 = 0{,}1\,\mathrm{T}$. Quelle sera à votre avis la fréquence de l'onde électromagnétique émise ? Commenter.

   (b) Calculer l'énergie rayonnée sur une période du mouvement de l'électron. Commenter.

4. On étudie désormais l'effet de la perte d'énergie cinétique de l'électron par émission de l'onde électromagnétique sur son mouvement. On considère qu'elle reste quasi-circulaire uniforme, avec un rayon r qui varie lentement à l'échelle d'une révolution. On note $\mathscr{E}(r)$ l'énergie cinétique pour un mouvement circulaire uniforme de rayon r.

   (a) Montrer que la variation relative infinitésimale de $\mathscr{E}(r)$, notée $\mathrm{d}\mathscr{E}(r)$ quand le rayon varie infinitésimalement de $\mathrm{d}r$ satisfait :
   $$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}(r)}{\mathscr{E}(r)} = p\frac{\mathrm{d}r}{r}, \qquad (2)$$
   avec p une constante dont on déterminera la valeur.

   (b) En déduire, en utilisant (1) qu'on a :
   $$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\Omega\,\mathrm{d}t, \qquad (3)$$
   avec Ω une constante qu'on exprimera en fonction de B_0 et des constantes fondamentales pertinentes.

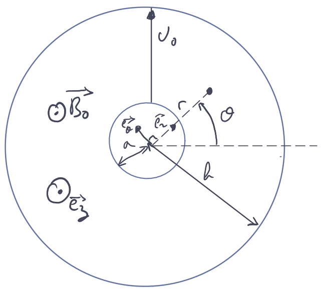
   (c) En déduire la durée nécessaire pour que le rayon soit divisé par 2, pour $B_0 = 0{,}1\,\mathrm{T}$. Commenter.

III Principe d'un magnétron

Un magnétron utilise une géométrie cylindrique avec une cathode centrale de rayon $r = a$ de rayon $r = b > a$ entre lesquelles est établie une tension $U_0 = V(r=b) - V(r=a)$ et un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ avec $U_0 > 0$ et $B_0 > 0$.
Il règne alors entre les électrodes un champ électrique radial $\vec{E} = E(r)\vec{e_r}$. On note $V(r)$ le potentiel électrique à la distance r. Ils vérifient :

$$V(r) = U_0\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \qquad \text{et} \qquad E(r) = -\frac{U_0}{r\ln(b/a)} \qquad (4)$$

5. On étudie dans cette question la possibilité d'un mouvement circulaire de rayon uniforme $r \in [a; b]$ dans un plan orthogonal à l'axe $\overrightarrow{e_z}$ et dans le sens trigonométrique défini par le vecteur $\overrightarrow{e_z}$



(**a**) Montrer qu'un tel mouvement est possible et préciser l'expression de la vitesse angulaire $\omega(r)$ en fonction, entre autres, de B_0 et U_0. Comparer à la « pulsation cyclotron » $\omega_c = eB_0/m_e$ après avoir rappelé ce qu'elle représente.

(**b**) Calculer la valeur de $\omega(b)$ et commenter.

(**c**) Si l'électron est émis de la périphérie de la cathode avec une vitesse nulle, déterminer la vitesse qu'il possède à la distance r. Comparer au cas de **5a** et commenter.

5. Dans le fonctionnement normal d'un magnétron, les électrons sont émis de la périphérie de la cathode avec une vitesse qu'on considérera nulle.

(**a**) Montrer que le mouvement est plan et conservatif et établir une expression de l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p(r)$. Justifier rapidement qu'elle ne dépend que de la coordonnées r.

(**b**) En appliquant à l'électron le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz, établir une relation entre $r^2; \dot{\theta}, r$. La constante des aires est-elle ici vérifiée ?

(**c**) En déduire que le mouvement radial de l'électron peut être étudié au moyen de l'« énergie potentielle effective » $\mathscr{E}_{\text{eff}}(r)$:

$$\mathscr{E}_{\text{eff}}(r) = K_1 r^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 - K_2 \ln\left(\frac{r}{a}\right), \tag{5}$$

avec K_1 et K_2 des constantes positives dont on donnera les expressions en fonction des constantes du problème.

(**d**) Tracer l'allure de $\mathscr{E}_{\text{eff}}(r)$. En déduire la relation que doivent vérifier U_0 et B_0 pour que l'électron n'atteigne pas l'anode en $r = b$.

6. Dans un four à micro ondes on cherche à produire une onde de fréquence $f_{H_2O} = 2{,}45\,\text{GHz}$ (pour exciter efficacement les molécules d'eau). Le magnétron sera d'autant plus efficace que :

- les électrons atteignent pratiquement l'anode en $r = b$ sans la toucher,
- leur vitesse angulaire en ce point vaut $2\pi\varphi_{H_2O}$.

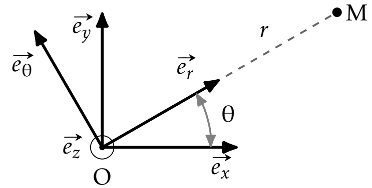
(**a**) Déterminer les valeurs de U_0 et B_0 permettant ce fonctionnement, pour $a = 1\,\text{mm}$ et $b = 1\,\text{cm}$.

(**b**) Décrire qualitativement le mouvement ultérieur d'un électron une fois qu'il a quasiment atteint $r = b$. Quel problème cela pose-t-il pour un fonctionnement en continu ? Justifier qualitativement que la présence d'autres électrons permet d'imaginer un fonctionnement en continu du dispositif.

Problème 2 : Elsa spationaute

On étudie les modifications de l'orbite d'un astronef M considéré comme un point matériel autour d'un astre de centre O à symétrie sphérique.

Dans tout le problème on conduira l'étude dans le référentiel astrocentrique considéré galiléen.
On noté m la masse de l'astronef et m_A celle de l'astre.
Données : masse de la Terre $m_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$; rayon physique de la terre $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{km}$; constante universelle de la gravitation $\mathscr{G} = 6{,}672\,34(14) \cdot 10^{-11}\,\text{SI}$; vitesse de la lumière $c = 299\,792\,458\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.



I Généralités et paramètres orbitaux

On établit dans cette partie plusieurs résultats utiles dans le reste du problème. On rédigera rapidement les réponses à ces questions, proches du cours.

1. (**a**) Montrer que le moment cinétique de M par rapport à O, noté $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ est conservé.

(**b**) En déduire que le mouvement de M autour de O est plan. On note par la suite σ la norme de $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$.

2. On considère que M parcourt une orbite circulaire de rayon r autour de O.

(**a**) Montrer que le mouvement est uniforme et établir l'expression de sa vitesse en fonction de $\mathscr{G}, m_A$ et r.

(**b**) En déduire les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique en fonction uniquement de $m, m_A, \mathscr{G}$ et r.

(**c**) En déduire l'expression du moment cinétique σ en fonction de $m, m_A, \mathscr{G}$ et r.

(**d**) Calculer le rayon et la vitesse pour une orbite géostationnaire, de période $T = 24\,\text{h}$.

(**e**) Calculer la période T_{ISS} et la vitesse v_{ISS} pour l'orbite de la station spatiale internationale (abréviée ISS, d'altitude $h_{\text{ISS}} = 3{,}8 \cdot 10^2\,\text{km}$).

3. On ne se limite plus désormais aux orbites circulaires. On se place en coordonnées polaires (r, θ) de centre O.

(**a**) Montrer qu'on peut définir une énergie potentielle effective, notée $\mathscr{E}_{\text{eff}}(r)$, qu'on exprimera en fonction de σ, m, m_T, r et $\mathscr{G}$, telle que l'énergie mécanique $\mathscr{E}_{\text{m}}$ vérifie à chaque instant :

$$\mathscr{E}_{\text{m}} = \mathscr{E}_{\text{eff}}(r) + \frac{1}{2} m \dot{r}^2. \tag{6}$$

(**b**) Tracer l'allure de $\mathscr{E}_{\text{eff}}(r)$ et en déduire la nature des mouvements (lié ou de diffusion) suivant les valeurs de $\mathscr{E}_{\text{m}}$.

(**c**) Déterminer la vitesse minimale que doit posséder l'astronef quand il se trouve à la distance r pour être dans un état de diffusion. On la nomme « vitesse de libération ».

(**d**) Dans le cas d'un état lié, rappeler la nature de la trajectoire et montrer que la distance r oscille entre deux valeurs minimale et maximale respectivement notées r_p et r_a. Illustrer sur la courbe précédente de $\mathscr{E}_{\text{eff}}$ comment déterminer les valeurs de r_p et r_a pour une valeur de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_{\text{m}}$ donnée.

(**e**) Établir l'expression de l'énergie mécanique dans un état lié en fonction de $\mathscr{G}$, m_T, m, r_p et r_a.

(**f**) Rappeler l'expression de la période sur une orbite caractérisée par r_p et r_a.

II Libération

L'astronef est initialement en orbite circulaire de rayon r_0.

1. (**a**) On modifie instantanément, au moyen de moteurs fusée, son vecteur vitesse d'une grandeur $\overrightarrow{\Delta v}$. Quelle est la valeur minimale de sa norme, notée Δv_0, pour que l'astronef soit dans un état de diffusion. On précisera les directions relatives de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\Delta v}$ au moment du changement.

(**b**) Calculer Δv_0 pour l'orbite de la station spatiale.

2. La station spatiale souhaite se placer sur une orbite circulaire de rayon double.

(**a**) Est-il possible de réaliser ce changement d'orbite en une seule opération comme celle présentée à la question **1** ? Montrer qu'on peut en revanche y parvenir en :

- passant de l'orbite circulaire de rayon r_{ISS} à une orbite elliptique grâce à un changement de vitesse $\overrightarrow{\Delta v_1}$,
- passant de l'orbite elliptique à une orbite circulaire de rayon $2r_{\text{ISS}}$ grâce à un changement de vitesse $\overrightarrow{\Delta v_2}$.

On présentera les orbites et les lieux des changements de vitesse sur un schéma ainsi que les valeurs minimales des normes Δv_1 et Δv_2 correspondantes.

(**b**) Quelle sera la durée minimale du transfert en deux étapes ? On donnera son expression et sa valeur.

3. (**a**) À partir de l'orbite circulaire de rayon $2r_{\text{ISS}}$ l'astronef effectue une troisième manœuvre pour passer en état de diffusion. Déterminer la valeur minimale de la norme Δv_3 du changement de vitesse $\overrightarrow{\Delta v_3}$ nécessaire.

(**b**) Comparer $\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3$ à Δv_0 et commenter.

III Black hole sun, won't you come ?

L'astronef est désormais initialement en orbite circulaire autour d'un trou noir de masse m_A. On traite son mouvement en mécanique classique en remplaçant l'énergie potentielle newtonnienne par l'énergie potentielle de Paczyński–Wiita $\mathscr{E}_{\text{pot}\,PW}$:

$$\mathscr{E}_{\text{pot}\,PW} = -\frac{\mathscr{G} m_A m}{r - r_S},$$

avec r_S une constante caractéristique du trou noir nommée « rayon de Schwarzschild ».

1. Le rayon de Schwarzschild est la distance à laquelle l'astronef doit se trouver de l'astre de masse m_A pour que sa vitesse de libération, donnée par l'expression de la question **3c**, soit égale à la vitesse de la lumière c. On considérera qu'un astre est un trou noir si son rayon est inférieur à son rayon de Schwarzschild.

Calculer le rayon de Schwarzschild du trou noir supermassif au centre de la voie lactée (nommé Sagitarius $A^\star$, abbrévié Sgr $A^\star$), de masse égale à 4 millions de masses solaires, soit $8 \cdot 10^{36}$ kg.

2. (**a**) Déterminer l'expression de la vitesse et de la période sur une orbite circulaire autour d'un trou noir.

(**b**) Calculer la vitesse et la période pour une orbite circulaire autour de Sgr $A^\star$ de rayon $r = 4 \cdot 10^7$ km.

3. (**a**) Établir l'expression de l'énergie potentielle effective correspondant à un astronef de moment cinétique σ_0 autour d'un trou noir de masse m_A et de rayon de Schwarzschild r_S et tracer l'allure de sa courbe.

(**b**) En déduire l'équation définissant le rayon r_0 de l'orbite circulaire de moment cinétique σ_0 (on ne cherchera pas à la résoudre).

(**c**) Étudier le signe de $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_{\text{eff}\,PW}}{\mathrm{d}r^2}$ en r_0. En déduire que les orbites circulaires ne sont stables que si elles sont au delà d'une distance minimale du trou noir. Calculer cette valeur pour Sgr $A^\star$.

Problème 3 : Chute d'arbres

On rappelle les lois phénoménologiques d'*Amontons et Coulomb*.
On décompose les actions de contact qu'un support exerce sur un solide en :

- une composante normale notée $\overrightarrow{N}$;
- une composante tangentielle notée $\overrightarrow{T}$.

Il existe un coefficient dit « de frottement », noté f, tel que :

Condition d'équilibre l'équilibre du solide par rapport au support est possible tant que la norme T de la composante tangentielle nécessaire pour l'assurer et la composante N de la composante normale vérifient $T \leqslant fN$;

Glissement en cas de glissement, la composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ est colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse de glissement et on a :

$$T = fN. \tag{7}$$

Données :

constantes accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$;

paramètres mécaniques masse de l'arbre $M = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$; hauteur de l'arbre $H = 20\,\mathrm{m}$; côté de la section carrée $a = 5{,}0 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}$; masse du·de la bûcheron·ne $m = 1{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{kg}$; longueur du câble $\ell = 25\,\mathrm{m}$.

paramètres aérodynamiques masse volumique de l'air $\rho_a = 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; coefficient $C_x = 0{,}5$.

I Arrachage manuel

Un·e bûcheron·ne assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M (avec $M > m$), de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 2.

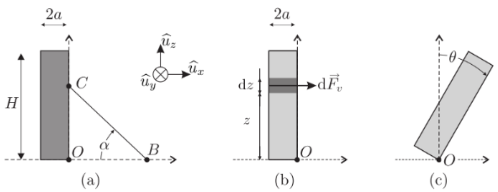


FIG. 2

Il·elle tire pour cela sur un câble fixé en un point Cde l'arbre, de longueur $BC = \ell$ et de masse négligeable, afin de faire pivoter l'arbre autour de l'axe (O, y). On suppose que l'arbre ne glisse pas sur le sol. On désigne par g l'accélération de la pesanteur.
L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où il commence à pivoter les actions de contact qu'il subit se limitent à une force de contact $\overrightarrow{R}_1 = T_{1x}\overrightarrow{u}_x + N_{1x}\overrightarrow{u}_z$ appliquée au point O. De même les actions de contact du sol sur le·la bûcheron·ne sont décrites par une force $\overrightarrow{R}_2 = T_{2x}\overrightarrow{u}_x + N_{2x}\overrightarrow{u}_z$. Ces deux forces sont décrites par les lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement f par hypothèse simplificatrice. Le câble est supposé tendu. On désigne par $\overrightarrow{F}$ la force exercée par le câble sur l'arbre au point C, et F sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique défini par le vecteur $\overrightarrow{u}_y$ et on note α l'angle entre $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{BC}$.

I.1. (**a**) Établir l'expression des composantes N_{2z} et T_{2x} si le·la bûcheron·ne ne glisse pas dans la situation initiale décrite à la figure 2(a).

(**b**) En déduire l'expression de la valeur maximale $F_{\max}$ de F en fonction de f, m, g et α.

(**c**) L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 2(a). Exprimer les normes N_1 et T_1 en fonction de F, α, M et g. L'arbre peut-il alors glisser pour $F \in [0, F_{\max}]$?

I.2. On désigne par Γ_B le moment exercé par le câble sur l'arbre par rapport à l'axe $\left(O, \overrightarrow{u}_y\right)$ dans la situation initiale décrite par la figure 2(a).

(**a**) Établir son expression en fonction de F, ℓ et de l'angle α.

(**b**) En déduire la norme minimale, notée $F_{\min}$ nécessaire pour faire pivoter l'arbre, puis qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α et donc de la position des points B et C si on garde la longueur ℓ constante.

(**c**) Calculer la valeur de $F_{\min}$ et commenter.

I.3. La figure 3 représente les variations, en fonction de l'angle α de $F_{\min}$ en trait fin continu et de $F_{\max}$:

- pour $f = 1$ en trait épais continu ;
- pour $f = 0{,}3$ en trait épais discontinu.

(**a**) En temps normal on peut considérer $f = 1$. Le·la bûcheron·ne peut-il mettre l'arbre en rotation sans glisser ? Si oui quel angle α devrait-il choisir ? Sinon quelle solution s'offre à lui ?

(**b**) Mêmes questions par temps pluvieux pour lequel on a $f = 0{,}3$.

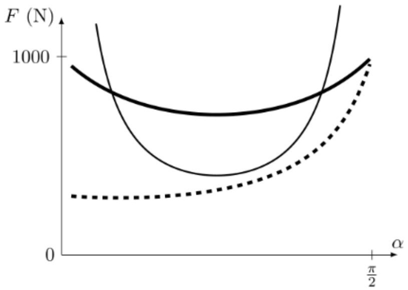


Fig. 3

I.4. On suppose dans toute la suite que le·la bûcheron·ne ne glisse pas et peut faire pivoter l'arbre, sans que celui-ci ne glisse au cours de son mouvement.

(**a**) Jusqu'à quelle valeur minimale de l'angle θ de la figure 2(c) le·la bûcheron·ne doit-il faire pivoter l'arbre pour parvenir à le faire chuter ?

(**b**) Pour la géométrie proposée, le moment d'inertie J de l'arbre en rotation autour du point O peut s'exprimer selon $J = MH^2/3$

i. Déterminer l'expression et calculer la valeur du travail minimal que doit exercer le·a bûcheron·ne pour amener l'arbre jusqu'à l'angle $\theta_{\min}$ lui permettant de chuter par lui-même jusqu'au sol. On considère dans toute la suite qu'on a pu conduire l'arbre jusqu'à cet angle $\theta_{\min}$ et qu'on l'y a abandonné avec une vitesse initiale négligeable pour qu'il poursuive sa chute.

ii. Déterminer l'expression et calculer la valeur de la vitesse de l'extrémité de l'arbre à l'issue de sa chute, quand il atteint le sol. En déduire une borne inférieure de la durée de chute de l'arbre à partir de l'instant où on l'abandonne en $\theta_{\min}$, puis une estimation de la vitesse à laquelle le·la bûcheron·ne (qui aura décidément pris tous les risques) doit courir selon $\overrightarrow{u}_x$ pour ne pas être écrasé.

II Déracinement d'un arbre par une bourrasque

On étudie dans cette partie la chute d'un arbre vivant sous l'effet d'un coup de vent violent. On néglige désormais le rôle du poids de l'arbre : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent. Cette dernière est modélisée par une force élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_v = C_x \rho_a U^2 \,\mathrm{d}S\, \overrightarrow{u}_x \tag{8}$$

appliquée à chaque tranche du tronc d'arbre entre la hauteur z et la hauteur $z + \mathrm{d}z$, pour un vent de vitesse $U\overrightarrow{u}_x$ (avec $U > 0$), en notant ρ_a la masse volumique de l'air et C_x un coefficient d'aérodynamisme. Lorsque l'arbre est vertical, la section élémentaire $\mathrm{d}S$ transverse au vent de la tranche élémentaire $\mathrm{d}z$ est donc $\mathrm{d}S = 2a\,\mathrm{d}z$.

II.5. (**a**) L'arbre étant vertical, exprimer le moment total, noté Γ_v des actions du vent par rapport à l'axe $O, \overrightarrow{u}_y$, en fonction de C_x, ρ_a, a, H et U.

(**b**) Lorsque l'arbre commence à s'incliner de l'angle θ défini sur la figure 2(c), le moment Γ_v varie en fonction de θ. Justifier, avec un minimum de calcul que $\Gamma_v(\theta)$ varie comme $\cos(\theta)^n$ avec n un entier dont on donnera la valeur. On considère dans toute la suite $\theta \ll 1$, et on fera donc l'approximation $\Gamma_v(\theta) \simeq \Gamma_v(0)$.

II.6. L'action du sol sur l'arbre est modélisée par un moment résistant Γ_r, par rapport à l'axe $O, \overrightarrow{u}_y$ qui prend en compte l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre…

On a relevé expérimentalement les variations de Γ_r en fonction de l'angle θ dans la figure 4. On y distingue une variation brusque au voisinage de $\theta = 0$ modélisée par une discontinuité telle que $\Gamma_r(0) = 0$ et $\Gamma_r(0^+) = \Gamma_0$. Au delà d'un certain angle θ_c, l'arbre est totalement déraciné et $\Gamma_r = 0$.
On pose $p = \Gamma_v / |G_0|$.

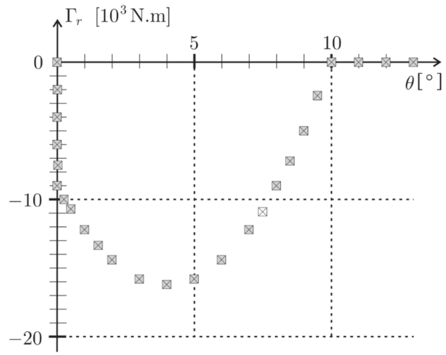


Fig. 4

(**a**) Discuter graphiquement selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $\theta = 0$. Déterminer, en le justifiant, si cet équilibre est stable.

(**b**) Discuter graphiquement selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $0 < \theta \leqslant \theta_c$. Déterminer, en le justifiant, si les éventuelles positions d'équilibre sont stables.

(**c**) Dans le cas où une position d'équilibre stable existe, expliquer sans calculs pourquoi on ne peut néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

(**d**) Déterminer la valeur de U pour laquelle il existe une position d'équilibre stable en $\theta = 3°$.

(**e**) Déterminer la valeur minimale de U pour laquelle on est certain que l'arbre sera déraciné et commenter.