

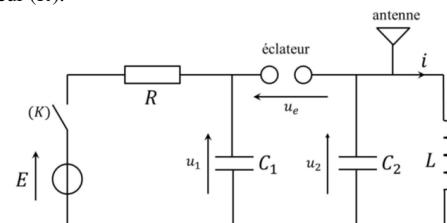
*Les sacs seront laissés devant le tableau. Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone !*

*Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.*

## Problème 1 : Télégraphie sans fil

La télégraphie sans fil (TSF) est apparue au début du XX<sup>e</sup> siècle. Elle repose toujours sur le codage de l'alphabet Morse, mais la transmission se fait par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques. Le principe consiste à émettre une série d'impulsions électromagnétiques de durées variables pour représenter les traits et les points. On étudie un émetteur courant de la TSF : l'émetteur à ondes amorties par excitation indirecte, représenté ci-dessous. Lorsque le télégraphiste veut émettre un signal, il appuie sur l'interrupteur ( $K$ ).

Tant que la tension  $u_e$  aux bornes de l'éclateur reste inférieure à une tension de claquage  $U_E$ , l'éclateur peut être assimilé à un interrupteur ouvert. Lorsque la tension  $u_e$  dépasse la valeur  $U_E$ , une étincelle apparaît entre les deux bornes de l'éclateur et celui-ci devient conducteur : on considérera qu'il se comporte alors comme un fil.



La tension imposée par le générateur de tension continue est égale à  $E > U_E$ . La bobine d'auto-inductance  $L$  et les condensateurs de capacité  $C_1$  et  $C_2$  sont supposés idéaux. À l'instant  $t = 0$ , le télégraphiste ferme l'interrupteur ( $K$ ). Les deux condensateurs sont déchargés pour  $t < 0$ .

**Données :**  $C_1 = 1,0 \mu\text{F}$ ;  $U_E = 5,0 \text{kV}$ ;  $E = 5,5 \text{kV}$ .

### I Éclateur ouvert

1. (a) Déterminer la valeur de la tension  $u_e$  aux bornes de l'éclateur à  $t = 0^+$ , en déduire que l'éclateur se comporte comme un interrupteur ouvert au début de l'évolution.  
(b) Établir l'expression de la tension  $u_1(t)$  au borne du condensateur de capacité  $C_1$  tant que perdure ce comportement de l'éclateur.
2. (a) Montrer qu'une étincelle apparaît entre les bornes de l'éclateur à un instant  $t_1$  dont on donnera l'expression. Calculer la valeur de  $R$  pour avoir  $t_1 = 2,5 \text{ ms}$ .  
(b) Tracer l'allure de  $u_1(t)$  pour  $t \in [0; t_1]$ , en y faisant apparaître  $U_E$  et  $E$ . On fera un schéma assez grand de la largeur de la copie.

### II Transfert de charges

Lorsque l'étincelle apparaît au niveau de l'éclateur, ce dernier se comporte comme un fil. Un transfert de charges quasi-instantané s'opère alors du condensateur de capacité  $C_1$  vers le condensateur de capacité  $C_2$ , conduisant à l'apparition d'une tension  $u_2 \equiv U_0$  aux bornes du condensateur de capacité  $C_2$ . Du fait de la brièveté de cette phase, la bobine d'auto-inductance  $L$  pourra être assimilée pendant cette phase à un interrupteur ouvert. On pourra aussi utiliser les

notations  $t_1^-$  et  $t_1^+$  respectivement pour les instants juste avant et juste après cette phase, et ainsi faire comme si les tensions  $u_1$  et  $u_2$  évoluaient de façon discontinue pendant cette phase.

3. (a) Justifier soigneusement qu'à l'issue de cette phase la tension  $U_0$  aux bornes du condensateur de capacité  $C_2$  vaut :

$$U_0 = \frac{U_E}{1 + C_2/C_1}. \quad (1)$$

- (b) On a  $C_2 \gg C_1$ , justifier qu'à l'issue de cette phase, on peut considérer que le condensateur de capacité  $C_1$  est intégralement déchargé.

### III Nouvelle ouverture de l'éclateur

On prend la fin de cette phase comme nouvelle origine des temps  $t' = 0$ .

4. (a) Justifier qualitativement et succinctement que l'étincelle disparaît et que l'éclateur se comporte de nouveau comme un interrupteur ouvert.  
(b) En déduire la valeur de la tension  $u_1(t' = 0)$  juste après cette ouverture de l'éclateur.  
(c) Justifier qu'on a  $u_2(t' = 0) = U_0$  et  $i(t' = 0) = 0$ .
5. Établir l'expression de la tension  $u_2(t')$  pour  $t' > 0$ , et avant toute nouvelle étincelle dans l'éclateur, en négligeant la présence de l'antenne, assimilée pour l'instant à un fil. Préciser l'expression de la période  $T_0$  des oscillations qui apparaissent.

### IV Émission par l'antenne

Les oscillations électriques sont converties en une onde électromagnétique par l'antenne. Du fait de la conversion d'énergie électrique en énergie électromagnétique, l'amplitude des oscillations électriques diminue, jusqu'à être nulle.

On admettra que cette décroissance se fait sur une durée inférieure à  $t_1$ , et on approximera la pseudo-période des oscillations à  $T_0$ . La répétition de ce cycle conduit alors à l'émission par l'antenne d'une série d'ondes amorties, comme le présent sur la figure 1 ci-contre.

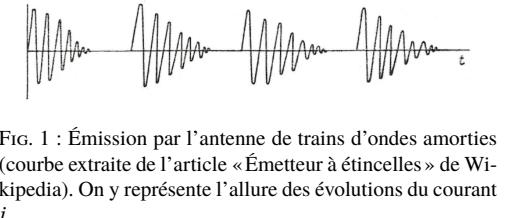


Fig. 1 : Émission par l'antenne de trains d'ondes amorties (courbe extraite de l'article « Émetteur à étincelles » de Wikipedia). On y représente l'allure des évolutions du courant  $i$ .

6. (a) Indiquer sur la courbe de la figure 1 les durées  $t_1$  et  $T_0$ .  
(b) Représenter l'allure de la tension  $u_1$  au cours du temps sur plusieurs cycles en complétant le graphe de la question 2b.
7. En supposant que les pertes par effet Joule sont négligeables, déterminer l'expression de l'énergie  $W_a$  transmise à l'antenne à chaque train d'ondes en fonction de  $C_2$  et  $U_0$ .
8. Pour cette question uniquement, on modélise l'amortissement des oscillations représentées sur la figure 1 en assimilant l'antenne à une petite résistance  $r$  en série dans le circuit de l'émetteur.

- (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur de capacité  $C_2$ . À quelle condition, portant sur  $L, C_2$  et  $r$ , cette tension aura-t-elle l'allure représentée sur la figure 1 ?
- (b) Lire sur la figure 1 un ordre de grandeur de la pseudo-période  $T_0$ .
- (c) On suppose qu'à  $t' = t_1/2$ , l'amplitude des oscillations de  $u_C$  a diminué de 80% (ce qui n'est pas forcément ce qui est représenté sur la figure 1). En déduire un ordre de grandeur du facteur de qualité  $Q$  du circuit de l'antenne.

## V Paramètres

À la réception, le signal électromagnétique est capté par une antenne qui convertit le signal électromagnétique en un signal électrique qui lui est proportionnel. À la suite de traitements plus ou moins complexes selon le type de récepteur, on obtient de nouveau le signal électrique de la figure 1, qu'on convertit en signal acoustique de même fréquence. Lorsqu'un signal est reçu, le télégraphiste entend un son dont la durée lui permet de distinguer les traits et les points de l'alphabet Morse, afin de reconstituer le message. On considère dans toute la suite que  $C_2 = 50\mu F$ .

9. (a) Rappeler la gamme de fréquences audibles par l'oreille humaine. Sachant que  $t_1 = 2,5\text{ ms}$ , montrer qu'on entend bien un son lors de la réception du signal.
- (b) Calculer, en utilisant le résultat de la question 7, la puissance moyenne émise par les trains d'ondes.
10. (a) À chaque émetteur TSF, on alloue une fréquence d'émission. Quels paramètres du circuit peut-on régler pour émettre à la fréquence allouée ?
- (b) Donner les valeurs de  $L$  et  $r$  correspondant aux paramètres précédemment déterminés à la question 8.
- (c) Déterminer l'expression et la valeur de la puissance instantanée maximale émise par l'antenne. On pourra effectuer toute hypothèse qui paraîtra pertinente au vu des caractéristiques du circuit.

## Problème 2 : Cavités résonnantes

On étudie dans ce problème des cavités métalliques résonnantes utilisées dans les accélérateurs de particules, pour « confiner » le champ électromagnétique radiofréquence nécessaire. On peut étudier ces cavités par analogie avec un système électrocinétique, étudié en régime sinusoïdal établi de pulsation  $\omega$ . On adopte la notation complexe. Pour une tension  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on utilise :

$$u(t) = \operatorname{Re}(u(t)) \quad \underline{u}(t) = U_m \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underline{U}_m \exp(j\omega t) \quad \text{avec : } \underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi) \quad \text{et } j^2 = -1. \quad (2)$$

## I Modèle idéal

Dans cette section, on néglige les pertes énergétiques dans la cavité. Lorsqu'un faisceau de particules accélérées traverse la cavité, son interaction avec la cavité peut être modélisée par le circuit représenté sur la figure 2. Le générateur délivre une tension sinusoïdale  $u(t)$  de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $U_m$ , on choisit sa phase nulle. La cavité parfaite est modélisée par un condensateur de capacité  $C$  en parallèle avec une bobine d'auto-inductance  $L$ . Le faisceau est modélisé par une résistance de résistance  $R$ .

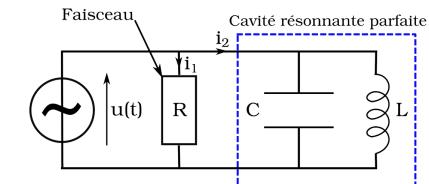


FIG. 2 : Modélisation électrocinétique d'un faisceau dans une cavité parfaite.

1. Établir l'expression de l'impédance complexe équivalente de la cavité résonnante parfaite.
2. Établir les expressions réelles du courant  $i_1(t)$  traversant la résistance  $R$  et  $i_2$  traversant la cavité, en fonction de  $U_m, R, L, C, \omega$  et  $t$ .
3. Pour quelle fréquence de la tension du générateur l'intensité  $i_2$  est-elle nulle ? On note  $\omega_0$  la pulsation correspondante.

## II Modélisation des pertes énergétiques

Les courants surfaciques sur les parois des cavités résonnantes induisent des pertes énergétiques. On les modélise par une résistance  $r$  placée en série avec la bobine idéale. Dans toute la suite on note  $x \equiv \omega/\omega_0$  où  $\omega_0$  a été définie à la question précédente.

4. (a) Établir la nouvelle expression de l'impédance complexe équivalente, notée  $\underline{Z}$ , de la cavité résonnante réelle.  
(b) Montrer que le module au carré de cette impédance peut s'écrire sous la forme :
- $$|\underline{Z}|^2 = r^2 \frac{1 + Q^2 x^2}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}, \quad (3)$$
- avec  $Q$  exprimé en fonction des caractéristiques du circuit.
5. On note  $i_L(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$  l'intensité du courant circulant dans la branche contenant le résistor et la bobine. Exprimer  $I_0$  et  $\alpha$  en fonction des caractéristiques du circuit et de  $\omega$ . Commenter le signe de  $\alpha$ .
  6. Dans toute la suite, on se place dans la situation où  $L\omega \gg r$ .

- (a) Quelle est alors la valeur de  $\alpha$  ? Que peut-on alors dire du courant circulant dans la bobine et de la tension aux bornes du générateur.
- (b) Pour  $\omega = \omega_0$ , déterminer une expression de l'énergie électromagnétique totale, notée  $\mathcal{E}$ , stockée dans la cavité résonnante en fonction de  $L$  et  $I_0$ .
- (c) En déduire une expression de la puissance moyenne, notée  $\mathcal{P}$ , dissipée dans  $r$  en fonction de  $\omega_0, \mathcal{E}$  et  $Q$ .
- (d) Lorsque la cavité est à température ambiante, le facteur de qualité vaut  $Q = 3,00 \cdot 10^4$ . À la température de 4K,  $Q = 10 \cdot 10^{10}$  et la puissance dissipée vaut 16W. Que vaudrait la puissance dissipée dans une cavité fonctionnant à température ambiante et ayant la même énergie stockée ? Justifier alors l'intérêt d'utiliser des cavités supraconductrices.

### III Modèle électrocinétique pour deux cavités idéales couplées

Dans un accélérateur de particules on doit utiliser plusieurs éléments successifs, qu'on peut modéliser comme plusieurs cavités idéales (*i.e.* sans résistor de résistance  $r$ ) couplées, alimentées par le même générateur.

On utilise le modèle ci-contre où le couplage est assuré par le condensateur de capacité  $C_c$ . On note  $v_1$  et  $v_2$  les tensions aux bornes des deux condensateurs identiques de capacité  $C$ , du modèle précédent d'une unique cavité idéale. On pose dans toute la suite  $D = C_c/C$ ,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et de nouveau  $x = \omega/\omega_0$ .

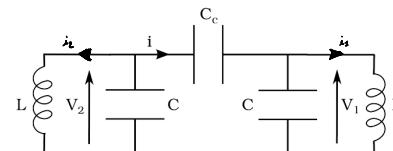


FIG. 3 : Modèle électrocinétique pour deux cavités idéales couplées.

7. On désigne par  $i$  l'intensité du courant dans la branche du condensateur de capacité  $C_c$ .
  - (a) Exprimer  $i$  à l'aide des tensions  $v_1$  et  $v_2$ .
  - (b) En déduire le système de deux équations différentielles vérifié par  $v_1$  et  $v_2$ .
8. On cherche une solution à ce problème qui soit sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . On travaille donc avec la notation complexe, et on pose  $v_1(t) = V_{1m} \exp(j\omega t)$  et  $v_2(t) = V_{2m} \exp(j\omega t + \varphi)$ .
  - (a) Montrer alors que résoudre le système d'équations différentielles revient à déterminer les valeurs de  $x$  vérifiant :
 
$$(1 - (1 + D)x^2)^2 - D^2x^4 = 0. \quad (4)$$
  - (b) Les pulsations vérifiant ces conditions sont appelées «pulsations propres» du système couplé. Déterminer l'expression des deux pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  du système. Pour chaque pulsation, donner l'expression de  $V_{2m}$  et  $\varphi$  en fonction de  $V_{1m}$  supposée connue, puis représenter graphiquement l'allure des deux tensions  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$ . On appellera «modes propres» ces solutions.
  - (c) En déduire, pour chaque pulsation propre du système, l'expression des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  traversant les bobines en fonction de  $V_{1m}$ ,  $L$  et  $\omega$ .
9. Déterminer l'énergie stockée dans chaque cavité, notées  $\mathcal{E}_1(t)$  et  $\mathcal{E}_2(t)$  pour chaque mode propre, en fonction de  $V_{1m}$ ,  $C$ ,  $D$  et  $\omega_1$  ou  $\omega_2$ .
10. Représenter graphiquement leur évolution temporelle. Quelle différence notable apparaît entre les deux modes propres sur le plan énergétique ?

#### Problème 3 : Récupération d'or métallique

On étudie dans ce problème la récupération d'or métallique (symbole chimique Au) à partir d'une solution de chlorure d'or  $\text{AuCl}_4^-$  par réduction par l'acide méthanoïque  $\text{HCOOH}$  selon la réaction :



qu'on considérera totale.

Une étude cinétique de cette transformation a été réalisée par K. Paclawski et T. Sak en 2014. Les auteurs font l'hypothèse que la vitesse de la réaction s'écrit sous la forme :

$$v = k[\text{AuCl}_4^-]^p [\text{HCOOH}]^q, \quad (6)$$

$p$  et  $q$  étant les ordres partiels par rapport aux réactifs et  $k$  la constante cinétique de la réaction. Les ordres partiels ne sont pas nécessairement des entiers.

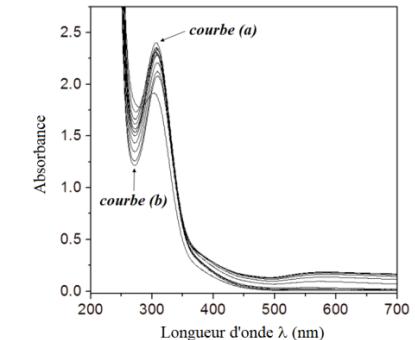


FIG. 4 : Absorbance de la solution en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ . Les différentes courbes (notamment (a) et (b)) représentent les spectres réalisés à différents instants.

Les auteurs réalisent ensuite, à une longueur d'onde  $\lambda_0$  judicieusement choisie, un suivi de l'absorbance au cours du temps pour différentes séries d'expériences dont les conditions initiales sont présentées dans le tableau 1, le pH étant maintenu égal à 2,7 dans toutes les expériences.

Série A	Série B	Série C
$\theta = 50^\circ\text{C}$	$\theta = 50^\circ\text{C}$	$[\text{HCOOH}]_0 = 1,5 \cdot 10^{-3}$
$[\text{HCOOH}]_0 = 5,0 \cdot 10^{-3}$	$[\text{AuCl}_4^-]_0 = 5,0 \cdot 10^{-5}$	$[\text{AuCl}_4^-]_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$
$[\text{AuCl}_4^-]_{01} = 5 \cdot 10^{-5}$	$[\text{HCOOH}]_{01} = 5,0 \cdot 10^{-3}$	$\theta_1 = 35^\circ\text{C}$
$[\text{AuCl}_4^-]_{02} = 1 \cdot 10^{-4}$	$[\text{HCOOH}]_{02} = 1,0 \cdot 10^{-2}$	$\theta_2 = 40^\circ\text{C}$
$[\text{AuCl}_4^-]_{03} = 1,5 \cdot 10^{-4}$	$[\text{HCOOH}]_{03} = 1,5 \cdot 10^{-2}$	$\theta_3 = 45^\circ\text{C}$
$[\text{AuCl}_4^-]_{04} = 2,0 \cdot 10^{-4}$	$[\text{HCOOH}]_{04} = 2,0 \cdot 10^{-2}$	$\theta_4 = 50^\circ\text{C}$

TAB. 1 : Conditions expérimentales initiales du suivi cinétique de la réaction. Les concentrations sont données en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Les mesures d'absorbances en fonction du temps permettent de tracer différentes courbes correspondant à chacune des séries d'expériences, représentées sur la figure 5. La grandeur  $v_0$  est la vitesse initiale de la réaction,  $k_{\text{obs}}$  est une constante introduite par les auteurs.

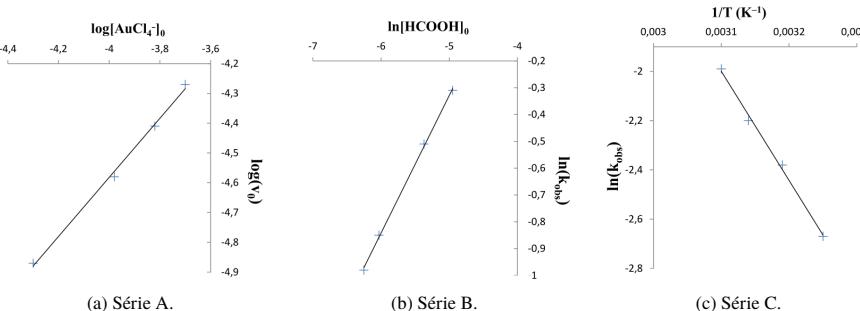


FIG. 5 : Courbes correspondant aux différentes conditions expérimentales. La grandeur  $v_0$  représente la vitesse initiale de la réaction, en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .  $k_{\text{obs}}$  est une constante introduite par les auteurs, exprimée en  $\text{s}^{-1}$ .

## I Généralités

On établit dans cette section des résultats généraux, indépendants des résultats expérimentaux. On pourra aborder la partie suivante de manière indépendante.

1. On suppose, pour cette question seulement, que l'ordre partiel par rapport à  $q$  est nul. On note respectivement  $c_0$  et  $c'_0$  les concentrations initiales en ions  $\text{AuCl}_4^-$  et  $\text{HCOOH}$ .
  - (a) Établir la loi d'évolution de la concentration en ions  $\text{AuCl}_4^-$  en fonction du temps. On distingue les cas  $p = 1$  et  $p \neq 1$ .
  - (b) En déduire l'expression du temps de demi-réaction pour  $p = 1$  et pour  $p = 0,5$  en fonction de  $k$  et  $c_0$ .
2. On désigne par  $A$  l'absorbance de la solution,  $A_0$  étant sa valeur à l'instant initial et  $A_\infty$  sa valeur quand elle est totalement effectuée.
  - (a) Exprimer  $A_0$  et  $A_\infty$  en fonction de  $c_0$ ,  $c'_0$ , de la longueur  $\ell$  de la cuve, et des coefficients d'absorption molaire respectifs de  $\text{AuCl}_4^-$  et  $\text{HCOOH}$ , notés  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ .
  - (b) Établir l'expression de la vitesse de variation  $\frac{dA}{dt}(t)$  en fonction de  $A(t)$ ,  $A_0$ ,  $A_\infty$ ,  $c$  et  $k$ .

## II Exploitation des données

3. (a) Estimer la valeur de la longueur d'onde  $\lambda_0$  choisie pour réaliser le suivi expérimental de l'absorbance au cours du temps.  
 (b) Attribuer, en le justifiant, les courbes (a) et (b) de la figure 4 aux instants  $t_0 = 0$  et  $t = 120 \text{ min}$ .
4. (a) Mesurer sur les courbes de la figure 5 les pentes des régressions linéaires qui y figurent.  
 (b) Dans les séries d'expériences B et C, les auteurs introduisent une constante nommée  $k_{\text{obs}}$ . Justifier son introduction et donner son expression.

5. On exploite dans cette partie les courbes de la figure 5.

- (a) Déterminer, en détaillant la démarche, la valeur de l'ordre partiel par rapport à  $\text{AuCl}_4^-$  en utilisant l'une des courbes.
  - (b) Déterminer, de même, la valeur de l'ordre partiel par rapport à  $\text{HCOOH}$  en utilisant une autre courbe.
  - (c) Déterminer enfin la valeur de l'énergie d'activation, notée  $E_a$ , de la réaction.
6. Déduire des résultats précédents l'expression puis la valeur du temps de demi-réaction pour un mélange stoechiométrique avec  $c_0 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , à  $\theta = 50^\circ\text{C}$ .