

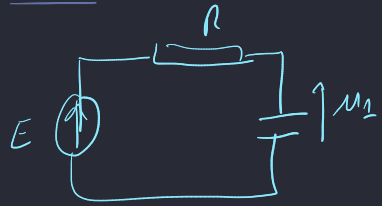
PP1 TSF

d'après la sélection française aux IPHO 2019

I1a Par continuité de la tension aux bornes

des condensateurs, on a $U_1 = U_2 = 0$ donc $U_e = 0 < U_E$.
L'éclateur est ouvert

I1b Le circuit est donc, pour C_1 :



On a $U_1 + R C \frac{dU_1}{dt} = E$.

L'unique solution vérifiant

$$U_1(0^+) = 0 \text{ est } U_1 = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = RC$$

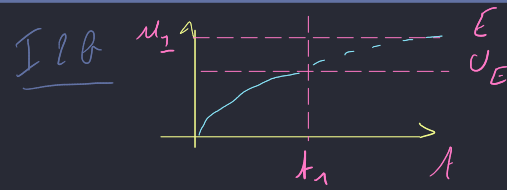
I2a Le condensateur reste sous une tension nulle

et U_1 croît vers $U_1 = E$, donc $U_e = U_1 - U_2$ également

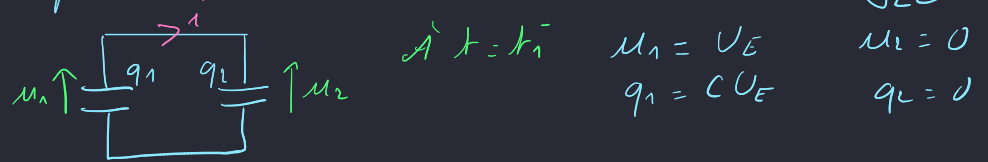
Une étincelle apparaît pour t_1, t_2

$$E \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right) = U_E \text{ soit } t_1 = RC \ln \frac{E}{E - U_E}$$

Soit $R = \frac{t_1 \leftarrow 85 \text{ ms}}{C \ln \left(\frac{E \leftarrow 55}{E - U_E \leftarrow 15} \right)} = 1,0 \text{ k}\Omega$



II3a Pendant cette phase, on a, en supposant que tout se passe sur une durée $\ll RC_1, RC_2$ et $\frac{1}{\sqrt{LC}}$



À $t = t_1^-$ $U_1 = U_E$ $U_2 = 0$
 $q_1 = C U_E$ $q_2 = 0$

On a $i = \frac{dq_2}{dt} = - \frac{dq_1}{dt}$, soit $q_1 + q_2 = \text{cte}$

À $t = t_1^+$ $q_1 + q_2 = C U_E$ et la loi des mailles

donne $U_1 = U_2 = U_0 \Rightarrow C_1 U_0 + C_2 U_0 = C_1 U_E$

soit $U_0 = \frac{U_E}{1 + \frac{C_2}{C_1}}$

II3b Pour $C_2 \gg C_1$ on aura donc $q_1(t_1^+) = C_1 U_0$
 $q_2(t_1^+) = C_2 U_0$

On a également $U_0 \approx \frac{C_1}{C_2} U_E \ll U_E = E$.

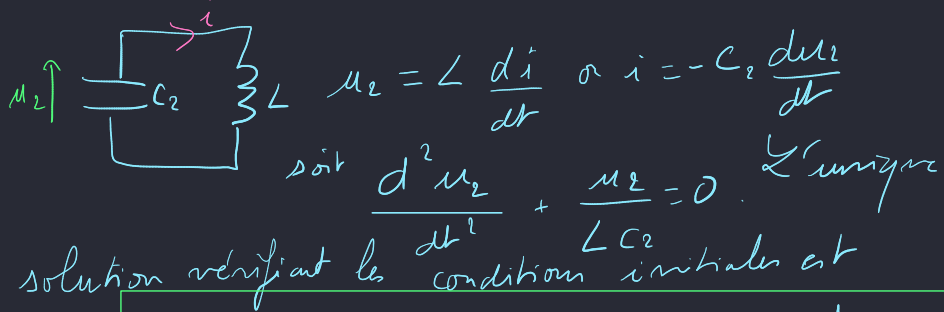
La charge de C_1 par E peut recommencer.

III 4a On a à $t'=0^+$ $U_1=U_2$ et plus de charges à faire circuler dans l'échelle. Le plasma s'éteint et l'éclateur est de nouveau ouvert

III 4b Par continuité de la tension aux bornes de C_1 , on a $u_1(t'=0^+) = U_0 \ll E$

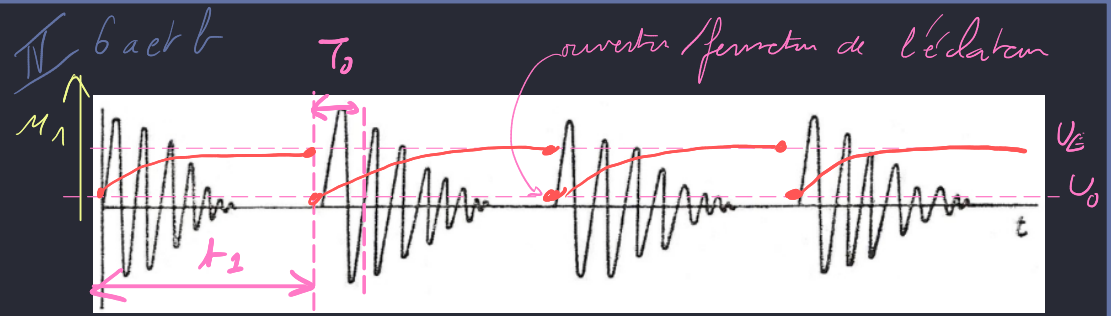
III 4c De même $u_2(t'=0^+) = U_0$. La continuité du courant dans la bobine assure $i(t'=0^+) = 0$

III 5 Pour C_2 , le circuit est alors



$$u_2 = U_0 \cos(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$$

La période est $T_0 = 2\pi \sqrt{LC_2}$



T_0 : durée d'1 pseudo-oscillation de u_2

t_1 : durée d'1 change de C_1 de $U_0 \approx 0$ à U_E .

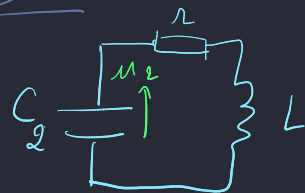
Rem L'allure du train d'onde indique que la grandeur représentative est $i(t)$, avec, au début de chaque impulsion les CI $\begin{cases} i(t') = 0 \\ \frac{di(t')}{dt} = \frac{u_2}{L} = \frac{U_0}{L} \end{cases}$

III 7 Dans le circuit LC_2 , à $t'=0^+$ $\begin{cases} \varphi_{elec} = \frac{1}{2} C_2 U_0^2 \\ \varphi_{mag} = 0 \end{cases}$

Au bout de t_1 , $u_{C_2} \ll U_E$
 $i \rightarrow 0$ donc $\begin{cases} \varphi_{elec} = 0 \\ \varphi_{mag} = 0 \end{cases}$

donc $\Delta(\varphi_{br}) = -\frac{1}{2} C_2 U_0^2 = W_a$

III 8a Le circuit de C_2 devient



La loi des mailles donne, avec $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_2}}$
 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2. \text{ Pour } \Delta < 0, \text{ on aura des}$$

solutions pseudo-périodiques amorties, soit $Q > \frac{1}{2}$ i.e. $r < 2\sqrt{\frac{L}{C_2}}$

IV 8b On lit sur la courbe

$$T_0 \approx \frac{t_1}{8} = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

IV 8c La solution est $u_c(t') = e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q}} U_m \cos(\omega t' + \varphi)$

avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. L'amplitude des oscillations

est $e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q}} U_m$ qui a décaï de 80% pour

$$e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q}} = 0,2 \text{ i.e. } \frac{t_1}{2} = -\frac{2Q}{\omega_0} \ln(0,2) = \frac{T_0 Q}{\pi} \ln(0,2)$$

$$\text{soit } Q = \frac{-\pi t_1}{2T_0 \ln(0,2)} \approx -\frac{4\pi}{\ln(0,2)} \quad (T_0 \approx \frac{t_1}{8}) = 8,0$$

IV 9a Le domaine audible est 20 Hz - 20 kHz. Avec

$$t_1 = 2,5 \text{ ms, on a } f_1 = \frac{1}{t_1} = 400 \text{ Hz, qui appartient}$$

à ce domaine.

IV 9b L'énergie W_a est émise toute les t_1 , soit une puissance moyenne

$$P_a = \frac{W_a}{t_1} = \frac{C_2 U_0^2}{2t_1} \approx \frac{C_1^2 U_E^2 \approx 5 \cdot 10^3}{2C_1 t_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ W}$$

$C_2 \gg C_1$

IV 10a La fréquence d'émission est fixée par $f_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2LC_2}}$ on la règle en modifiant ces paramètres. Si on veut conserver la puissance, on changera seulement L .

$$\text{IV 10b On a } L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C_2} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ H. De plus}$$

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C_2}}$$

$$r = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C_2}} = \frac{T_0}{8\pi Q C_2} = 1,2 \cdot 10^{-1} \Omega$$

IV 10c On a $P_a = r i^2$, avec $i = -C_2 \frac{du_c}{dt}$ et

$$u_c = e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q}} U_m \cos(\omega t' + \varphi). \text{ Pour } Q = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ on a}$$

$\omega \approx 0$, $e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q}} \approx 1$ sur les premières oscillations. Les CI

sont $u_c(t'=0) = 0$ et $i(t'=0) = 0$, soit $u_c \approx U_0 \cos(\omega_0 t')$

donc $i_2 = C_2 \omega_0 U_0 \sin(\omega_0 t')$ et $i_2 \text{ max} = C_2 \omega_0 U_0$, d'où

$$P_{a \text{ max}} = r i_{2 \text{ max}}^2 = \frac{T_0 C_2^2 \omega_0^2 U_0^2}{2\pi Q C_2} = \frac{2\pi C_2 U_0^2}{Q T_0} \approx \frac{|\ln(0,2)| U_E^2 C_1^2}{2t_1 C_2} = 100 \text{ W}$$

PB2 Cavités résonnantes
d'après CAPEL externe 2011

I1 Pour une association parallèle

$$Z = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

I2 On en déduit :

$$\underline{I_1} = \frac{U}{R} \rightarrow i_1 = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t)$$

$$\underline{I_2} = \frac{U}{Z} = \frac{U}{jL\omega} \frac{(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2} \rightarrow i_2 = U_m \left| \frac{1}{L\omega} - C\omega \right| (-1)^{\beta} \sin(\omega t)$$

avec $\beta = \text{sgn}\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$

$|I| = \left| \frac{1}{L\omega} - C\omega \right|$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

I3 On aura $i_2 = 0$ pour $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0$



$$Z' = \frac{r + jL\omega}{1 + rjL\omega - LC\omega^2}$$

I4b On en déduit

$$|Z'|^2 = r^2 \left| \frac{1 + j\frac{L\omega}{r}}{1 + rjL\omega - LC\omega^2} \right|^2 = r^2 \frac{1 + \frac{L^2\omega^2}{r^2}}{(1 - LC\omega^2)^2 + r^2C^2\omega^2}$$

Avec $\frac{L^2\omega^2}{r^2} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{L^2\omega_0^2}{r^2} = x^2 Q^2 \rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$

- $LC\omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

- $r^2 C^2 \omega^2 = \underbrace{r^2 C^2 \omega_0^2}_{=1} x^2 = \frac{1}{Q^2}$



On $|r + jL\omega| = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2}$ et $\alpha = -\text{arg}(r + jL\omega)$
(car $r > 0$) $= -\arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)$

Soit $I_0 = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \underbrace{\arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)}_{\uparrow < 0})$

I6a Pour $L\omega \gg r$, on a $\alpha \approx -\arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}$
 \rightarrow i est en quadrature retard par rapport à u

II 6b L'énergie électromagnétique est, pour $\omega = \omega_0$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{élec}} + \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i_L^2$$

$$\text{or } u_c = u = U_m \cos(\omega_0 t)$$

$$i_L \approx \frac{U_m}{L \omega_0} (-\sin(\omega_0 t)) = -\sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t)$$

soit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U_m^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)$$

$$= \frac{C U_m^2}{2} = \frac{1}{2} L I_0^2 \text{ car } \frac{U_m}{I_0} = L \omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

II 6c La puissance moyenne dissipée dans r est

$$P = \langle i_L^2 \rangle_r = \frac{r U_m^2 C \langle \sin^2(\omega_0 t) \rangle}{2L} = \frac{r U_m^2 C}{2L}$$

$$\text{or } Q = \frac{L \omega_0}{r}, \text{ soit } \frac{r}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$P = \frac{\omega_0 C U_m^2}{Q} = \frac{\omega_0 \mathcal{E}}{Q}$$

II 6d On suppose que seul r varie avec k , donc ω_0 demeure et $Q \uparrow$ quand $T \downarrow$. On a donc

$$\frac{P_{\text{ambiant}}}{Q_{4K}} = \frac{Q_{4K}}{Q_{\text{ambiant}}} = 3,3 \cdot 10^6$$

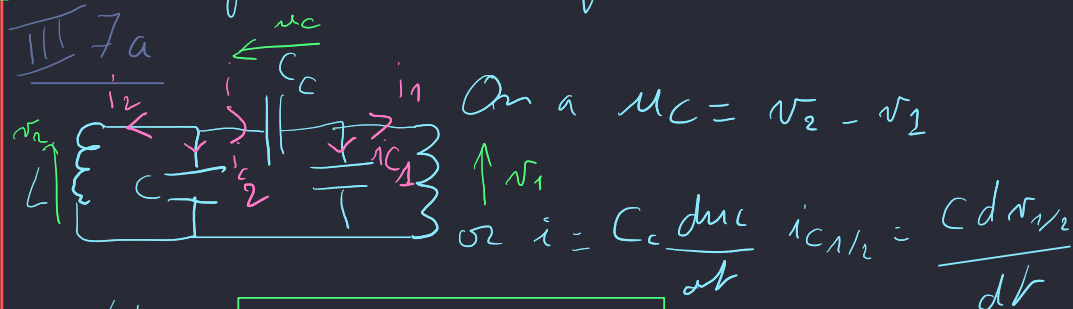
16W $\rightarrow P_{4K}$

$$\rightarrow P_{\text{ambiant}} = 48 \text{ MW}$$

Les pertes sont

énormes, l'utilisation de cavités supraconductrices, possible à très basse température, permet de les diminuer grandement en augmentant Q .

III 7a



soit

$$i = C_c \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$$

III 7b

Par ailleurs: $i = i_{c1} + i_1$ ↳ les deux membres

$$= C \frac{dv_1}{dt} + i_1 \text{ et } v_1 = \frac{L di_1}{dt}$$

soit

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{v_1}{L}$$

et donc: $C \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{v_1}{L} = C_c \frac{d^2 (v_2 - v_1)}{dt^2}$

Enfin $i = -i_1 - i_2$ et donc:

$C_c \frac{d^2 (v_2 - v_1)}{dt^2} = - \left(\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{v_2}{L} \right)$. On en déduit

$(1+D) \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{v_1}{LC} = D \frac{d^2 v_2}{dt^2}$
 $(1+D) \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{v_2}{LC} = D \frac{d^2 v_1}{dt^2}$

#8a En RSE à ω , on a $\frac{d^2 v_1}{dt^2} = -\omega^2 v_1$

soit $-\omega^2(1+D) \underline{v_{1m}} + \omega^2 \underline{v_{1m}} = -D \omega^2 \underline{v_{2m}}$

$\left\{ \begin{aligned} (1-x^2(1+D)) \underline{v_{1m}} + D x^2 \underline{v_{2m}} &= 0 \quad (A) \\ D x^2 \underline{v_{1m}} + (1-x^2(1+D)) \underline{v_{2m}} &= 0 \quad (B) \end{aligned} \right.$

On a alors $\frac{\underline{v_{1m}}}{\underline{v_{2m}}} = \frac{-D x^2}{(1-x^2(1+D))} = \frac{-D x^2}{1-x^2(1+D)}$

soit $\frac{\underline{v_{1m}}}{\underline{v_{2m}}} = \frac{-D x^2}{1-x^2(1+D)}$

soit $(1-x^2(1+D))^2 = D^2 x^4$

Pens On aurait pu établir ce résultat en écrivant que le déterminant de la matrice

$\begin{pmatrix} 1-x^2(1+D) & D x^2 \\ D x^2 & 1-x^2(1+D) \end{pmatrix}$ doit être nul.

#8b On résout $(1-x^2(1+D))^2 = D^2 x^4$

soit $D x^2 = 1-x^2(1+D)$ (1)

ou $D x^2 = x^2(1+D) - 1$ (2)

Cas (1) $D x^2 = 1-x^2 - D x^2$: $x^2 = \frac{1}{1+2D}$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+2D}}$ car $x > 0$

Cas (2) $x^2 = 1$ $x_2 = 1$

Ensuite $\rightarrow \frac{\underline{v_{2m}}}{\underline{v_{1m}}} = \frac{x^2(1+D) - 1}{D x^2} = \begin{cases} 1 \text{ car (2)} \\ \frac{1+D}{1+2D} - 1 = -1 \text{ (1)} \\ \frac{D}{1+2D} \end{cases}$

La phase est nulle pour le cas (2), $\frac{1+2D}{1+2D}$ égal à 1 pour le cas (1) $x = 1$ $v_1 = v_2$ car (2)

On a $\omega_2 > \omega_1$

