Problème 1 : Accordeur de guitare

On étudie quelques aspects du fonctionnement d'un accordeur de guitare. Il s'agit d'un appareil permettant de régler la tension des six cordes pour que leurs fréquences fondamentales de vibration soient celles du tableau ci-après.

Corde	Fréquence (f_{ac} (Hz)
Mi grave	82,4
La	110
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aigu	329,6

On note f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde étudiée, initialement légèrement différente de f_{ac}. On s'intéresse au traitement du signal électrique produit par la vibration de la corde dont on considère qu'il reproduit fidèlement ses vibrations mécaniques.

I Filtrage du signal

La figure 1 présente un exemple de ce signal électrique, noté $u_e(t)$.

I.1. (**a**) Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

(**b**) En supposant en première approximation qu'il est périodique, donner, en en justifiant la lecture sur le graphique, une estimation de la valeur de sa fréquence fondamentale et en déduire de quelle corde il s'agit.

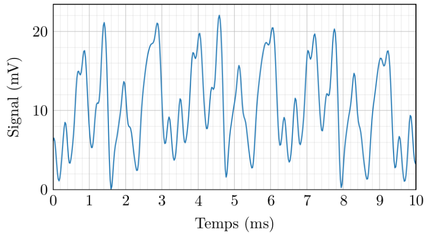


FIG. 1 : Signal u_e de la guitare.

I.2. Le signal électrique u_e de la figure 1 est envoyé sur le filtre de la figure 2 (filtre F_1).

(**a**) En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et établir l'expression de la fonction de transfert, notée $\underline{H_a}(j\omega)$ en fonction de R_1, C_1, ω_1.

(**b**) Déterminer les expressions asymptotiques du gain en décibel et tracer le diagramme de Bode.

(**c**) Pour $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$ et $C_1 = 100\,\mathrm{nF}$, calculer la fréquence de coupure à $-3\,\mathrm{dB}$ de ce filtre. Quel sera son effet sur le signal de la figure 1 ?

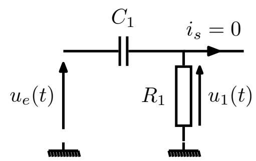


FIG. 2 : filtre (F_1).

II Étude spectrale

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_1 obtenu en sortie du filtre F_1, dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence f_{ac}. On utilise pour cela le filtre F_2 dont le diagramme de Bode du gain est représenté sur la figure 3, à deux échelles différentes. Il possède une fréquence caractéristique, qu'on choisit égale à f_c et dont on pourra ultérieurement varier la valeur.

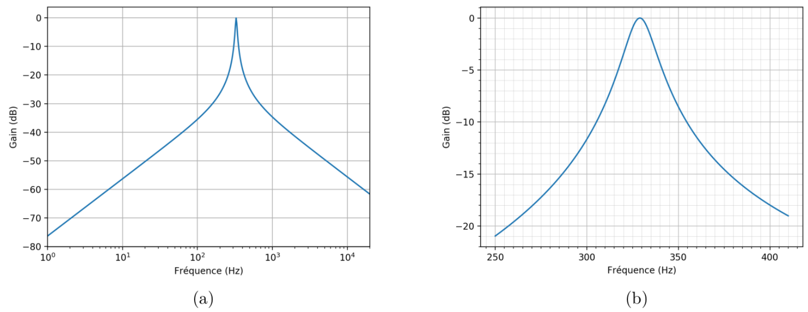


FIG. 3 : Diagramme de Bode du filtre F_2

.

II.1. (**a**) Déterminer la nature du filtre. Quelle est sa fréquence caractéristique ? À quelle note correspond-elle ?

(**b**) Lire sur la courbe la valeur de sa bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$.

(**c**) Si la fréquence de vibration de la corde est $f_{co} = 315\,\mathrm{Hz}$, déterminer de quel facteur est atténuée la composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

II.2. La figure 4 représente le spectre du signal u_e de la figure 1.

(**a**) Vérifier l'accord de la valeur de l'amplitude de la composante de fréquence nulle avec le signal u_e.

(**b**) Vérifier de même l'accord de la valeur de la fréquence de la première composante de fréquence non nulle, notée f_1. On ne se préoccupera pas de son amplitude.

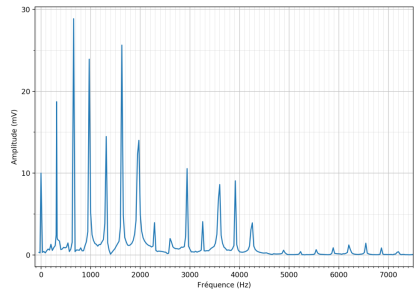


FIG. 4 : Spectre du signal u_e de la figure 1.

(**c**) Décrire le spectre du signal u_1 en sortie du filtre F_1. On calculera les amplitudes des deux composantes étudiées aux questions **II.2a** et **II.2b**.

(**d**) Décrire le spectre du signal en sortie du filtre F_2 quand on lui applique le signal u_1 obtenu en sortie du filtre F_1 (on suppose qu'un montage suiveur intercalé entre les deux filtres permet de conserver la fonction de transfert $\underline{H_1}$). On calculera les amplitudes de la composante spectrale de fréquence f_1 et de celle de fréquence $5\underline{f_1}$.

III Filtre accordable

On cherche à réaliser un filtre F_2 dont la fréquence soit réglable en changeant la valeur d'une résistance. On utilise pour cela le montage de la figure 5.

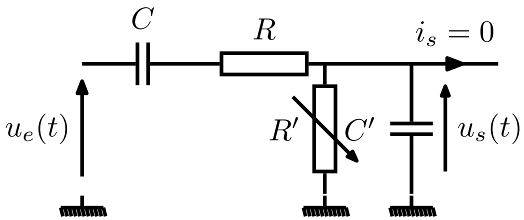


FIG. 5

III.1. (**a**) Établir l'expression de sa fonction de transfert notée $\underline{H}_2$. On la mettra sous la forme :

$$\underline{H}_2 = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \tag{1}$$

avec H_0, Q et ω_0 des constantes positives qu'on exprimera en fonction de R, R', C et C'.

(**b**) Établir l'expression de la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$ en fonction de f_0 et Q.

III.2. Étudier les variations de Q avec le quotient $r = R/R'$ et montrer qu'il admet un maximum dont on donnera l'expression en fonction de C et C'. On note $r_{\max}$ la valeur de r réalisant ce maximum.

III.3. On se place dans la condition $r = r_{\max}$. Proposer des valeurs pour R, R', C et C' permettant d'avoir la fréquence caractéristique et la finesse du diagramme de Bode de la figure 3 (on ne se préoccupera pas de la valeur du gain maximal).

III.4. Quelle devra être la variation relative de R' pour changer la fréquence f_{ac} de $2\,\mathrm{Hz}$. Quelle sera la variation correspondante de Q ? Commenter.

III.5. Mêmes questions si on souhaite changer la fréquence f_c du Mi grave au Mi aigu.

Correction du problème 1

I Filtrage du signal

1. (a) Le signal oscille autour d'une valeur moyenne d'environ 10 mV.

   (b) Le signal, bien que non sinusoïdal présente une quasi-périodicité : on reconnaît les mêmes formes de pics. On dénombre 3 périodes en 9,5 ms, soit $f = 316$ Hz, proche d'un Mi aigu (désaccordé).

2. (a) Un pont diviseur de tension donne

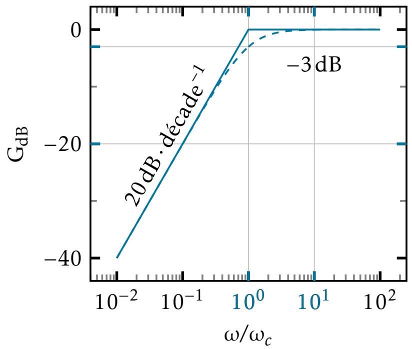
$$\underline{H}_a = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \quad \text{avec : } \omega = \frac{1}{R_1 C_1}. \tag{2}$$

   On reconnaît un passe-haut d'ordre 1.

   (b) On a :

   - $\omega \ll \omega_c$: $\underline{H}_a \simeq \frac{j\omega}{\omega_c}$, soit $G_{\text{dB}} = 20\log(\omega/\omega_c)$
   - $\omega \gg \omega_c$: $\underline{H}_a \simeq 1$, soit $G_{\text{dB}} = 0$
   - $\omega = \omega_c$: $\underline{H}_a = 1/(1-j)$, soit $G_{\text{dB}} = 0$

   Le diagramme de Bode est représenté sur la figure ci-contre.



   (c) Le gain linéaire en bande passante valant $\underline{H}_a(+\infty) = 1$, la pulsation de coupure est celle pour laquelle $\left|\underline{H}_a\right| = 1/\sqrt{2}$. On vérifie qu'il s'agit de $\omega = \omega_c = 1/(R_1C_1)$. On calcule $f_c = \omega_c/(2\pi) = 15{,}9$ Hz. Cette fréquence est faible devant la fréquence fondamentale de la partie variable du signal. Celle-ci sera donc transmise à l'identique. En revanche la valeur moyenne non-nulle déterminée à la question **1a** correspond à une composante de fréquence nulle qui sera donc éliminée : le signal u_1 en sortie du filtre F_1 aura une valeur moyenne nulle.

II Étude spectrale

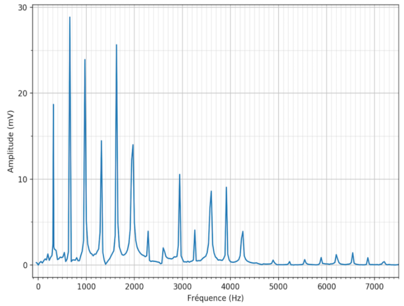
1. (a) Le gain en décibel tend vers $-\infty$ pour $\omega \to \pm\infty$: il s'agit d'un filtre passe-bande. Les asymptotes ont des pentes qu'on mesure à ± 20 dB : le filtre est d'ordre 2. Sa fréquence de résonance est 330(2) Hz.

   (b) Les fréquences de coupure sont celles pour lesquelles le gain vaut −3 dB. On lit $\omega_{c1} = 320(2)$ Hz et $\omega_{c2} = 335(2)$ Hz, soit une bande passante de 15(3) Hz.

   (c) On lit $G_{\text{dB}} = -6$ dB pour $f = 315$ Hz, soit un gain linéaire de $\left|\underline{H}_a\right| = 10^{-6/20} = 0{,}5$.

2. (a) La composante de fréquence nulle a une amplitude de 10 mV, en accord avec la moyenne non nulle du signal de la figure 1.

   (b) On distingue sur la figure 4 des pics espacés de $4250(50)/13 = 327(4)$ Hz qui est donc la fréquence fondamentale, en accord avec la question **1b**. En revanche il y a un problème (dans l'énoncé original) avec la valeur des amplitudes des composantes variables. L'amplitude du fondamental présente une amplitude de 18 mV sur le spectre 4 alors que sur le signal 1 cette amplitude est plutôt légèrement inférieure à 10 mV.



   (c) L'amplitude de la composante continue sera nulle. Celle des autres ne sera pas affectée car la fréquence fondamentale est très supérieure à sa fréquence de coupure. Le spectre aura l'allure ci-contre.

   (d) Le filtre F_2 va laisser passer le fondamental f_1 qui est dans sa bande passante et atténuer fortement la composante de fréquence $5f_2$. Plus précisément, on lit les gains :

   $f = f_1$: $G_{\text{dB}} = -6$ dB, soit une amplitude de $18\,\text{mV} \times 10^{-6/20} = 9{,}0$ mV,

   $f = 5f_1$: $G_{\text{dB}} = -45$ dB soit une amplitude de $26\,\text{mV} \times 10^{-45/20} = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$ mV.

III Filtre accordable

1. (a) On utilise un pont diviseur de tension pour l'association série : $C - R - (R'//C')$. On obtient alors :

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{R'}{1+jR'C'\omega}}{R + 1/(jC\omega) + \frac{R'}{1+jR'C'\omega}} = \frac{R'}{R + R' + 1/(jC\omega) + R'C'/C + jRR'C'\omega} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{1 + R/R' + C'/C + jRC'\omega - j/(R'C\omega)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \tag{4}$$

$$\text{avec : } H_0 = \frac{1}{1 + R/R' + C'/C} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{RR'CC'}} \quad Q = \frac{\sqrt{RC'/R'C}}{1 + R/R' + C'/C}. \tag{5}$$

   On détermine ces valeurs ainsi :

   H_0 : en factorisant pour avoir un terme constant égal à 1 au numérateur,

   ω_0 : en cherchant la valeur de ω qui annule les termes imaginaires purs au dénominateur,

   Q : en faisant apparaître ω_0 et $1/\omega_0$ puis en factorisant dans les termes imaginaires purs.

   On reconnaît l'expression d'un passe-bande du 2$^{\text{e}}$ordre.

   (b) Le gain maximal, *ie* pour $\omega = \omega_0$, vaut H_0. Les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} sont celles pour lesquelles le gain vaut $H_0/\sqrt{2}$. Elles vérifient donc :

$$Q\left(\frac{\omega_{c1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{c1,2}}\right) = \pm 1 \tag{6}$$

Ce sont des racines d'un polynôme de degré deux, en ne gardant que celles qui sont positives, on calcule alors :

$$\frac{\omega_{c1}}{\omega_0} = \frac{-1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \qquad \frac{\omega_{c1}}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1+4Q^2}$$

$$\frac{f_{c2}-f_{c1}}{f_0} = \frac{\omega_{c2}-\omega_{c1}}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = \frac{1+R/R'+C'/C}{\sqrt{RC'/R'C}} \tag{7}$$

2. En notant $r = R/R'$, on a :

$$Q = \sqrt{C'/C}\frac{\sqrt{r}}{1+r+C'/C} \rightarrow \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} = \frac{1+C'/C-r}{2\sqrt{r}\left(1+r+C'/C\right)}, \tag{8}$$

qui s'annule en $R/R' = 1+C'/C$. Pour cette valeur, on calcule Q qui vaut, après simplification :

$$Q_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{1+C/C'}}. \tag{9}$$

3. On veut $f_0 = 330\,\mathrm{Hz}$ et $f_{c2}-f_{c1} = 15\,\mathrm{Hz}$, soit $Q = f_0/(f_{c2}-f_{c1}) = 22$. L'énoncé présentait une erreur, il n'est pas possible de réaliser une valeur aussi grande de Q avec ce circuit, quelles que soient les valeurs des quotients R/R' et C/C'.

4. En gardant R, C et C' constants, on compare les faibles variations relatives de f_0 et R avec les formules de propagation d'erreurs :

$$\frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{\Delta R'}{2R'} \quad \text{soit :}\ \frac{\Delta R'}{R'} = -\frac{1}{2}\times\frac{2\,\mathrm{Hz}}{330\,\mathrm{Hz}} = -3{,}0\cdot 10^{-3}. \tag{10}$$

L'expression de Q ne permet pas de calculer ses variations relatives sans connaître les valeurs de R, R', C et C' initiales.

5. Pour changer la fréquence f_c du Mi grave au Mi aigu, on devra multiplier la fréquence f_c par 4, soit diviser la résistance R' par 2.